BIẾN ĐỔI RADON : CHỈNH HÓA BẰNG KHAI TRIỂN HỮU HẠN GIÁ TRỊ KỲ DỊ

Nguyễn Văn Nhân
Trường Đại Học Kinh Tế
(Bài nhận ngày 29/07/1998)

TÓM TẮT: Biến đổi Radon là một bài toán không chỉnh. Trong bài báo này, chúng tôi chỉnh hóa bài toán bằng cách sử dụng khai triển hữu hạn giá trị kỳ dị. Sai số xấp xỉ và sai số dữ kiện cũng được đánh giá .

Trước tiên, ta cần nhắc lại một số kí hiệu và một số khái niệm có dùng trong bài .

$L_2(\Omega^2)$ là tập các hàm giá trị thực bình phương khả tích trên đĩa tròn đơn vị $\Omega^2 \subset R^2$.

$L_2(Z,w^{-1})$ là tập hợp các hàm giá trị thực **g** sao cho $w^{-1/2}$ **g** bình phương khả tích trên Z, trong đó :

$$Z = SxR = \{(\theta,s):\theta \in R^2, |\theta| = 1, s \in R\}$$

$$w = (1-s^2)^{1/2}$$

Ta có $L_2(\Omega^2)$ và $L_2(Z,w^{-1})$ là các không gian Hilbetr.

Các chuẩn tương ứng ký hiệu là $|.|$

Với $f \in L_2(\Omega^2)$, ta có biến đổi Radon của f được định nghĩa như sau:

$$Rf(\theta,s) = \int_{L(\theta,s)} f(x)\, ds, \ \forall s \in R, \forall \theta \in S \quad (1)$$

trong đó:

$$L(\theta,s) = \{x \in R^2 : x.\theta = s\} \quad (2)$$

Ta có biến đổi Radon R là một toán tử tuyến tính liên tục từ $L_2(\Omega^2)$ vào $L_2(Z,w^{-1})$ (xem [1], trang 17). Do đó, toán tử liên hợp R^* cũng tuyến tính, liên tục.

Ngoài ra R là toán tử compact.

Ta nhắc lại rằng một hệ kỳ dị của toán tử compact K từ không gian Hilbetr H_1 vào không gian Hilbetr H_2 là hệ $\{u_j, v_j, \lambda_j\}$ trong đó $\{\lambda_j^2\}$ là tập hợp các giá trị riêng giảm của toán tử tự liên hợp K^*K, $\lambda_j \to 0$, $\{u_j\}$ là tập các vectơ riêng trực chuẩn tương ứng, $v_j = \lambda_j^{-1} K u_j$.

Ta có:

$$Kf = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j (f, u_j) v_j \quad (3)$$

Biểu diễn này của toán tử K gọi là khai triển giá trị kỳ dị.

Bây giờ, ta xét phương trình toán tử :

$$Rf = g \qquad (4)$$

trong đó $g \in L_2(Z, w^{-1})$ là hàm đã biết, $f \in L_2(\Omega^2)$ là hàm cần tìm.

Trước hết, ta có kết quả sau đây :

Mệnh đề: Bài toán (4) là một bài toán không chỉnh.

Chứng minh. Theo [1], trang 154, ta có :

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|l|\le m}{}' \lambda_m^{-1}(g, g_{ml}) f_{ml} \qquad (5)$$

trong đó Σ' chỉ tổng trên các số l thỏa l+m chẵn.

$g_{lm}(\theta, s) = \frac{1}{\Pi} . w(s) U_m(s) e^{il\varphi}$.

$\theta = (\cos\varphi, \sin\varphi)$

$f_{ml}(s, \theta) = 2^{1/2} P_{(m-l)/2,l}(s^2) s^l e^{il\varphi}$

U_m là các đa thức Chebychev loại 2, $P_{k,l}$, k=0,1.... là các đa thức trực chuẩn trong [0,1] với hàm trọng lượng t^l, và:

$$\lambda_m^2 = \lambda_{ml}^2 = \frac{4\pi}{m+1} \qquad (6)$$

Bây giờ nếu g bị nhiễu một đại lượng có dạng εg_{ml}, nghĩa là :

$g^{\varepsilon} = g + \varepsilon g_{ml}$

Gọi f^{ε} là nghiệm suy rộng tương ứng với g^{ε}, ta có :

$$| f^{\varepsilon} - f | = \varepsilon \lambda_m^{-1} = \frac{\varepsilon\sqrt{m+1}}{2\sqrt{\pi}} \to \infty \quad \text{khi } m \to \infty$$

Như thế toán tử nghịch đảo suy rộng $Tg = f$ của toán tử Radon $Rf = g$ không bị chặn, do đó không liên tục, nghĩa là không phụ thuộc ổn định theo dữ kiện ban đầu g .

Để chỉnh hóa bài toán, ta xấp xỉ nghiệm bằng chuỗi hữu hạn của khai triển kỳ dị. Ta có các đánh giá sai số như sau:

Định lý. Đặt :

$$R_n g = f_n = \sum_{m=0}^{n} \sum_{|l|\le m} \lambda_m^{-1}(g, g_{ml}) f_{ml} \qquad (7)$$

trong đó n là số nguyên dương thỏa tính chất :

$$n = n(\varepsilon) < \frac{4\pi}{\varepsilon} - 1 \le n+1 \qquad (8)$$

Giả sử f∈Range (R^*R) và | g^ϵ - g | < ∈. Khi đó, ta có

$$\left|f_n^{\varepsilon} - f\right| < c\sqrt{\varepsilon} \qquad (9)$$

trong đó :

$$f_n^{\varepsilon} = R_n\left(g^{\varepsilon}\right)$$

Chứng minh. Trước hết, ta có :

$$\left|f_n^{\varepsilon} - f_n\right| = \left|R_n g^{\varepsilon} - R_n g\right| = \left|R_n\left(g^{\varepsilon} - g\right)\right|$$

$$\le \left|R_n\right| \left|g^{\varepsilon} - g\right| \le \sup_{m \le n} \lambda_m^{-1}\varepsilon = \lambda_n^{-1}\varepsilon = \frac{\varepsilon\sqrt{n+1}}{2\sqrt{\pi}} \qquad (10)$$

Bây giờ, ta có với $m \ge n+1,\ |\ l\ | \le m$:

$$\lambda_m^{-2}\lambda_{n+1}^{-2}\left|\left(g, g_{ml}\right)\right|^2 < \lambda_m^{-4}\left|\left(g, g_{ml}\right)\right|^2$$

$$= \lambda_m^{-4}\left|\left(Rf, \lambda_m^{-1} Rf_{ml}\right)\right|^2$$

$$= \lambda_m^{-6}\left|\left(f, R^* Rf_{ml}\right)\right|^2$$

$$= \lambda_m^{-6}\left|\left(f, \lambda_m^{2} f_{ml}\right)\right|^2$$

$$= \lambda_m^{-2}\left|\left(f, f_{ml}\right)\right|^2$$

Vì $f \in Range\ (R^*R)$ nên tồn tại $f_o \in L_2\left(\Omega^2\right)$ sao cho :

$$R^* Rf_o = f$$

Suy ra:

$$\lambda_m^{-2}\left|\left(f, f_{ml}\right)\right|^2 = \lambda_m^{-2}\left|\left(R^* Rf_o, f_{ml}\right)\right|^2$$

$$= \lambda_m^{-2}\left|\left(f_o, R^* Rf_{ml}\right)\right|^2$$

$$= \lambda_m^{-2}\left|\left(f_o, \lambda_m^{2} f_{ml}\right)\right|^2$$

$$= \lambda_m^{2}\left|\left(f_o, f_{ml}\right)\right|^2$$

Do đó:

$$\lambda_{n+1}^{-2}\left|f_n - f\right|^2 \le \sum_{m=n+1}^{\infty} \sum_{|l| \le m} \lambda_m^{2}\left|\left(f_o, f_{ml}\right)\right|^2$$

$$\le \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|l|\le m} \lambda_m^2 |(f_o, f_{ml})|^2 = |Rf_o|^2$$

Suy ra: $|f_n - f| < |Rf_o| \lambda_{n+1} = \dfrac{2\sqrt{\pi}|Rf_o|}{\sqrt{n+2}}$ (11)

Từ (10) và (11), ta được :

$$|f_n^\varepsilon - f| \le |f_n^\varepsilon - f_n| + |f_n - f| < \frac{\varepsilon\sqrt{n+1}}{2\sqrt{\pi}} + \frac{2\sqrt{\pi}|Rf_o|}{\sqrt{n+2}} \quad (12)$$

Với n = n(ε) xác định trong (8), ta suy ra :

$$|f_n^\varepsilon - f| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{2\sqrt{\pi}|Rf_o|\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{\pi}} = \sqrt{\varepsilon}\left(1 + |Rf_o|\right) = C\sqrt{\varepsilon}$$

Định lý chứng minh xong. □

Chú ý: Từ bất đẳng thức (12) , ta thấy với $\varepsilon > 0$ cố định , khi $n \to \infty$

thì $\dfrac{2\sqrt{\pi}|Rf_o|}{\sqrt{n+2}} \to 0$ trong khi đó $\dfrac{\varepsilon\sqrt{n+1}}{2\sqrt{\pi}} \to \infty$.

Với cách chọn n phụ thuộc vào ε như trong (8) , ta có:

khi $\varepsilon \to 0$ thì $n(\varepsilon) \to \infty$ và $f_n^\varepsilon \to f$.

THE RADON TRANSFORM : REGULARIZE BY TRUNCATED SINGULAR VALUE DECOMPOSITION

Nguyen Van Nhan

ABSTRACT: The Radon transform is an ill-posed problem. In this paper, we regularize it by using truncated singular value decomposition. Approximation error and data error are given.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] F.Natterer, the mathematics computerized tomography, Wiley 1986.

[2] S.R.Deans, The Radon transform and some of its application, Wiley 1983.

[3] S.Helgason, The Radon transform, Birkhauser 1980.

[4] A.K.Louis, Tikhonov-Phillips regularization of the Radon transform, International series of Num. Maths., Vol 73, pp. 211-223, 1985.

[5] C.W.Groetsch, Inverse problems in the mathematica sciences, Vieweg 1993.

[6] J.Baumeister, Stable solutions of inverse problems, Vieweg 1987.

[7] J.Randon ber die Bestimmung von Funtionen durch, ihre Integralwetre]ngs gewisser Mannigfaltig keiten, Berichte Şchsische Akademie der Wissenschaften, Leipzig, Math.-Phys. kl., 69,pp 262-267, 1917.