

THỦY TINH SPIN: Lý thuyết trường trung bình

Hoàng Dũng

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên

(*Bài nhận ngày 21/03/1998*)

Tóm tắt: Bài tổng quan này trình bày về lý thuyết trường trung bình cho thủy tinh spin với các tính chất cơ bản đã giới thiệu trong [7]. Mô tả mô hình bán kính tương tác vô hạn của Sherrington và Kirkpatrick cùng lời giải của mô hình này. Bàn về nghiệm đối xứng replica và tính bất ổn định của nghiệm này. Trình bày sơ đồ vi phạm đối xứng replica và ý nghĩa vật lý của nó. Tìm hiểu hệ phương trình trạng thái của thủy tinh spin và một số tính chất của hệ ở nhiệt độ thấp. Chứng tỏ rằng lý thuyết trường trung bình mô tả định tính khá tốt những tính chất tĩnh của thủy tinh spin.

Mở đầu

Thủy tinh spin (spin glasses) là một hướng nghiên cứu mới của vật lý, thu hút sự quan tâm đặc biệt của các nhà khoa học trong gần hai thập kỷ nay [1-6]. Trong bài tổng quan [7], chúng tôi đã trình bày những đặc tính cơ bản của thủy tinh spin và kết quả của một số thí nghiệm liên quan nhằm giới thiệu với bạn đọc trong nước hướng nghiên cứu mới này của vật lý. Bài này là phần tiếp theo [7] với mục đích trình bày về lý thuyết thủy tinh spin mà chủ yếu là *lý thuyết trường trung bình*, một lý thuyết thành công nhất cho tới nay trong việc mô tả thủy tinh spin cùng các đặc tính của nó.

Do hạn chế số trang trong một bài nên những khái niệm cơ sở về thủy tinh spin sẽ không được nhắc lại ở đây. Bạn đọc có thể tìm lại những khái niệm này trong [7].

1. Mô hình Sherrington-Kirkpatrick

Nhằm mô tả hệ sắt từ mất trật tự, Sherrington và Kirkpatrick [8] (viết tắt: S-K) đã sử dụng hamiltonian:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} S_i S_j, \quad S_i = \pm 1 \quad (1.1)$$

trong đó S_i là spin Ising tại nút mạng i và có thể nhận các giá trị ± 1 ứng với một trong hai khả năng định hướng song song hoặc đối song với một phương xác định nào đó; J_{ij} là năng lượng tương tác trao đổi giữa spin tại các nút mạng i và j . Trong bài này sử dụng hệ đơn vị qui ước với hằng số Boltzman và magneton Bohr bằng một ($k_B = \mu_B = 1$). Mô hình S-K dựa trên hai giả thiết chính:

1) Các đại lượng J_{ij} trong (1.1) không phụ thuộc vào khoảng cách r_{ij} giữa các

spin (do đó mô hình S-K thường được gọi là *mô hình bán kính tương tác vô hạn*).

2) J_{ij} thay đổi ngẫu nhiên cả về dấu cũng như độ lớn và tính ngẫu nhiên này được mô tả bởi phân bố Gauss:

$$P(J_{ij}) = \left(\frac{N}{2\pi J^2}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{[J_{ij} - (J_0/N)]^2}{2J^2/N}\right\} \quad (1.2)$$

với N là số spin trong hệ, J_0/N là trị trung bình của J_{ij} , còn J/\sqrt{N} là phương sai, đặc trưng cho độ lệch của J_{ij} khỏi giá trị trung bình

$$\langle\langle J_{ij} \rangle\rangle = J_0/N, \quad \langle\langle J_{ij}^2 \rangle\rangle - \langle\langle J_{ij} \rangle\rangle^2 = J^2/N \quad (1.3)$$

Trong (1.2) cũng như toàn bài này, ta dùng ký hiệu $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ để chỉ phép lấy trung bình theo các biến ngẫu nhiên J_{ij} với hàm phân bố (1.2), thường gọi là phép lấy trung bình mất trật tự

$$\langle\langle (\dots) \rangle\rangle = \prod_{i < j} \int_{-\infty}^{+\infty} (\dots) P(J_{ij}) dJ_{ij} \quad (1.4)$$

Để tính năng lượng tự do F của hệ spin mất trật tự nói trên, ta cần thực hiện hai phép tính trung bình: 1) Tính trung bình nhiệt động như đối với hệ spin trật tự với các biến cố định

$$F_J = -T \ln Z, \quad Z = \text{Tr} \exp(-H/T) = \sum_{\{S_i = \pm 1\}} \exp(-H/T) \quad (1.5)$$

và 2) Lấy trung bình mất trật tự

$$F = \langle\langle F_J \rangle\rangle = -T \langle\langle \ln Z \rangle\rangle \quad (1.6)$$

Lưu ý rằng đối với hệ spin trật tự, không cần phải thực hiện phép lấy trung bình thứ hai.

Việc tính trung bình mất trật tự đối với biểu thức $\ln Z$ là một bài toán cực khó và S-K đã giải quyết nhờ một thủ thuật toán học gọi là *phương pháp replica*. Phương pháp này do Edwards và Anderson [9] khởi xướng và dựa trên đẳng thức

$$\ln Z = \lim_{n \rightarrow 0} (Z^n - 1)/n \quad (1.7)$$

(nhớ rằng $Z^n = \exp(n \ln Z) \approx 1 + n \ln Z$ khi $n \rightarrow 0$). Nhờ đó, đưa việc tính $\langle\langle \ln Z \rangle\rangle$ về việc tính $\langle\langle Z^n \rangle\rangle$. Với n nhận các trị số nguyên, ta có thể xem đại lượng

$$Z^n = \left(\prod_{a=1}^n \sum_{S_i^a = \pm 1}\right) \exp\left(-\frac{1}{T} \sum_{a=1}^n H[S^a]\right) = \text{Tr} \exp\left(\frac{1}{2T} \sum_{a=1}^n \sum_{i,j} J_{ij} S_i^a S_j^a\right), \quad (1.8)$$

như thể tổng thống kê của n hệ độc lập, giống hệt hệ đã cho. Ta gọi những hệ này là các *replica* (các *phiên bản* của hệ đã cho) và đánh số chúng bởi chỉ số a ($a = 1, 2, \dots, n$). Bây giờ có thể dễ dàng tính trung bình biểu thức (1.8) theo phân bố (1.2). Bước tiếp theo là thác triển giải tích đối với biểu thức $\ll Z^n \gg$ thu được, coi nó như một hàm giải tích của biến n liên tục, rồi cho n tiến tới không. Đây chính là "gót chân Achille" của phương pháp replica vì cho đến giờ vẫn chưa có một cơ sở toán học chặt chẽ cho việc lấy giới hạn $n \rightarrow 0$

Theo sơ đồ trên, S-K thu được biểu thức sau đây cho $\ll Z^n \gg$

$$\ll Z^n \gg = \exp\left(\frac{J^2 N n}{4T^2}\right) \text{Tr} \exp\left\{\frac{J_0}{2NT} \sum_a (\sum_i S_i^a)^2 + \frac{J^2}{2NT^2} \sum_{a<b} (\sum_i S_i^a S_i^b)^2\right\} \quad (1.9)$$

Sử dụng đẳng thức Hubbard-Strantonovich

$$\exp(\lambda x^2/2) = (\lambda/2\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-\lambda x^2/2 + a\lambda x), \quad (1.10)$$

ta có thể khử các số hạng chứa $(\sum_i S_i^a)^2$ và $(\sum_i S_i^a S_i^b)^2$ trong (1.9) và thu được

$$\begin{aligned} \ll Z^n \gg &= \exp\left(\frac{J^2 N n}{4T^2}\right) \int \prod_{a<b} \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{J}{T} dQ_{ab} \prod_a \left(\frac{N J_0}{2\pi T}\right)^{1/2} dm_a \\ &\exp\left\{-\frac{N J^2}{2T^2} \sum_{a<b} Q_{ab}^2 - \frac{N J_0}{2T} \sum_a m_a^2 + N \ln \text{Tr} \exp L[Q_{ab}, m_a]\right\} \quad (1.11) \end{aligned}$$

với

$$L[Q_{ab}, m_a] = \left(\frac{J}{T}\right)^2 \sum_{a<b} Q_{ab} S^a S^b + \frac{J_0}{T} \sum_a m_a \quad (1.12)$$

Ở giới hạn nhiệt động ($N \rightarrow \infty$), có thể tính các tích phân trong (1.11) bằng phương pháp điểm yên ngựa. Nhờ đó từ (1.11), (1.12) và (1.7) ta thu được biểu thức sau đây cho năng lượng tự do tính cho một spin

$$\begin{aligned} f = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F}{N} &= -T \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left\{ \frac{J^2 n}{4T^2} - \frac{J^2}{2T^2} \sum_{a<b} Q_{ab}^2 + \frac{J_0}{T} \sum_a m_a^2 + \right. \\ &\left. + \ln \text{Tr} \exp L[Q_{ab}, m_a] \right\} \quad (1.13) \end{aligned}$$

với Q_{ab} và m_a được xác định từ các phương trình:

$$\frac{\partial f}{\partial Q_{ab}} = \frac{\partial f}{\partial m_a} = 0 \quad (1.14)$$

Trong (1.12) - (1.14), các thông số Q_{ab} hợp thành một ma trận vuông bậc n với các phần tử chéo $Q_{ab} = 0$. Có thể chứng minh rằng các tham số Q_{ab} và m_a thỏa các phương trình tự hợp

$$Q_{ab} = \langle S^a S^b \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\text{Tr} S^a S^b \exp L[Q_{ab}, m_a]}{\text{Tr} \exp L[Q_{ab}, m_a]}, \quad (1.15)$$

$$m_a = \langle S^a \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\text{Tr} S^a \exp L[Q_{ab}, m_a]}{\text{Tr} \exp L[Q_{ab}, m_a]} \quad (1.16)$$

Đến đây dường như công việc còn lại thật đơn giản: trước tiên cần tính biểu thức (1.13) cho $f[Q_{ab}, m_a]$, sau đó thay vào (1.14) và giải những phương trình này để tìm các giá trị Q_{ab}^* và m_a^* cho cực tiểu năng lượng tự do f , rồi cho n tiến tới không. Tuy nhiên trên thực tế công việc phức tạp hơn nhiều vì không thể thực hiện các tính toán trên cho trường hợp tổng quát (không tính được biểu thức (1.13) cho ma trận Q bất kỳ). Do đó để giải bài toán trên người ta làm như sau. Trước hết đoán nhận một dạng cụ thể của ma trận cực trị Q^* bao gồm một số hữu hạn thông số. Sau đó tìm những thông số này từ các phương trình (1.14) rồi thay chúng vào (1.13) để tính năng lượng tự do cực tiểu f_{\min} . Do cách chọn dạng ma trận Q^* ngay từ đầu, kết quả thu được chỉ là f_{\min} trong một không gian con của tất cả các ma trận Q . Nhưng nếu ta chọn được Q sao cho tất cả trị riêng của ma trận

$$G = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial Q_{ab} \partial Q_{cd}} \quad (1.17)$$

luôn luôn dương ở mọi nhiệt độ thì điều đó có nghĩa là f_{\min} cũng là cực tiểu của f trong không gian của tất cả các ma trận Q chứ không phải chỉ trong không gian con mà ta chọn ban đầu. Dưới đây là cách chọn ma trận Q dưới dạng đơn giản nhất.

2. Nghiệm đối xứng replica

Do các replica (các phiên bản của hệ đã cho) như nhau, S-K giả thiết rằng các thông số Q_{ab} và m_a không phụ thuộc vào chỉ số replica a, b [8]

$$Q_{ab} = q \quad \forall a \neq b, \quad m_a = m \quad (2.1)$$

Phép gần đúng này gọi là gần đúng đối xứng replica (The replica symmetry approximation, viết tắt: RSA) và tương đương với giả thiết trong hệ chỉ có một trạng thái cơ bản duy nhất. Lưu ý rằng trong gần đúng này, không gian con của ma trận Q chỉ chứa một tham số q duy nhất.

Thay (2.1) vào (1.13), dễ dàng tìm được biểu thức sau đây cho năng lượng tự do f

$$\frac{f}{T} = \frac{J_0 m^2}{2T} - \frac{J^2(1-q^2)}{4T^2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \ln \left[2 \cosh \left(\frac{J_0}{T} m + \frac{J}{T} q^{1/2} z \right) \right] \quad (2.2)$$

trong đó các thông số q và m được xác định từ điều kiện (1.14) và thỏa mãn các phương trình

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh^2 \left(\frac{J_0}{T} m + \frac{J}{T} q^{1/2} z \right) \quad (2.3)$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-z^2/2} \tanh \left(\frac{J_0}{T} m + \frac{J}{T} q^{1/2} z \right) \quad (2.4)$$

Từ (2.3) và (2.4) dễ thấy m là độ từ hóa trung bình, còn q (thông số Edwards-Anderson [9]) mang ý nghĩa trị trung bình của bình phương mômen tại từng nút mạng

$$q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle S_i \rangle_T^2 \quad (2.5)$$

với $\langle \dots \rangle_T$ ký hiệu phép lấy trung bình nhiệt động. Các phương trình (2.3) và (2.4) cho thấy

$$H_{\text{eff}} = Jq^{1/2}z + J_0m \quad (2.6)$$

có thể xem như một trường phân tử tác dụng lên từng nút mạng. Trong mô hình S-K, các trường phân tử này tuân theo phân bố Gauss với trị trung bình J_0m và phương sai J^2q .

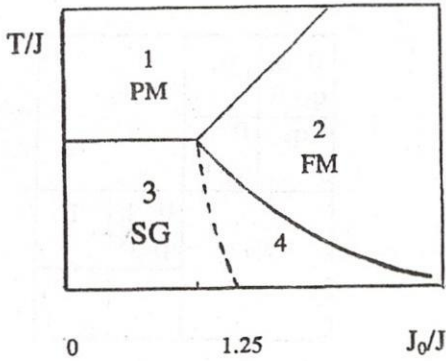
Đối với hệ thủy tinh spin lý tưởng ($J_0 = 0$), hệ phương trình (2.3)-(2.4) cho kết quả: thông số $m = 0$ ở mọi nhiệt độ, còn thông số q bằng không ở các nhiệt độ $T \geq T_g = J$ và khác không ở $T < T_g$. Như vậy nghiệm đối xứng replica cho phép mô tả chuyển pha từ pha thuận từ sang pha thủy tinh spin. Độ cảm từ tính theo các phương trình trên tuân theo định luật Currie $\chi \sim T^{-1}$ trong pha thuận từ và có điểm gãy tại $T = T_g$. Còn độ cảm phi tuyến thì phân kỳ tại điểm này: $\chi_{nl} \sim (T - T_g)^{-1}$. Những kết quả này đều phù hợp định tính với thực nghiệm.

Giải hệ phương trình (2.3)-(2.4), S-K thu được giản đồ pha cho hệ sắt từ mất trật tự khi $J_0 \neq 0$ và không có từ trường ngoài ($h = 0$). Trên hình 1, miền 1 là pha thuận từ ($m = q = 0$), miền 2 và 4 là pha sắt từ ($m \neq 0, q \neq 0$) còn miền 3 là pha thủy tinh spin ($m = 0, q \neq 0$). Nếu $1 \leq J_0/J \leq 1.25$ và giảm nhiệt độ, hệ sẽ lần lượt trải qua các pha thuận từ - sắt từ - thủy tinh spin. Về định tính, điều này phù hợp với hiện tượng chuyển pha trở lại (the reentrant phase transition) đã trình bày trong mục 2.4 bài [7].

3. Sự bất ổn định của nghiệm đối xứng replica

Thoạt nhìn, có vẻ như RSA cho kết quả tốt đẹp. Tuy nhiên chính S-K đã sớm phát hiện ra rằng phép gần đúng mà họ sử dụng dẫn đến điều phi lý là entropy, một đại lượng vật lý luôn luôn dương, lại nhận giá trị âm ở miền nhiệt độ thấp! $S \approx -0.17$ tại $T = 0$ [8]. Như vậy ở miền nhiệt độ này nghiệm RSA không còn đúng nữa.

Như đã biết, phương pháp điểm yên ngựa mà ta dùng để tính các tích phân trong (1.11) đòi hỏi các trị riêng của ma trận \mathbf{G} (1.17) phải dương ở mọi nhiệt độ và nghiệm thỏa mãn điều kiện này gọi là nghiệm ổn định. Khảo sát bài toán trị riêng của ma trận \mathbf{G} , de Almeida và Thouless [10] (viết tắt: A-T) đã chứng



Hình 1. Giản đồ pha của hệ sắt từ mất trật tự. Theo gần đúng RSA thì miền 1 là pha thuận từ (PM), miền 2 và 4 là pha sắt từ (FM), miền 3 là pha thủy tinh spin (SG). Theo A-T (xem mục 3), chỉ có miền 2 là pha sắt từ, còn 3 và 4 là miền bất ổn định của nghiệm RSA.

minh rằng nghiệm RSA chỉ ổn định ở miền nhiệt độ $T \geq T_g$ với T_g thỏa phương trình

$$T^2/J^2 = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} \cosh^{-4}(H_{\text{eff}}(z)/T) \quad (3.1)$$

với $H_{\text{eff}}(z)$, m và q được xác định từ (2.5), (2.3) và (2.4). Còn tại nhiệt độ $T = T_g$, một trong các trị riêng của ma trận \mathbf{G} đổi dấu từ dương sang âm và như thế nghiệm RSA trở nên không ổn định ở miền nhiệt độ $T \leq T_g$. Đường biên giới giữa các miền ổn định và không ổn định của nghiệm này gọi là đường A-T. Giản đồ pha của hệ sắt từ mất trật tự khi $J_0 \neq 0, h = 0$ tính theo lý thuyết A-T [10] được vẽ trên hình 1. Đường biên giữa các pha PM-FM, PM-SG vẫn như trong gần đúng RSA, nhưng đường biên FM-SG bây giờ thay đổi. Miền 4 không còn thuộc pha sắt từ nữa và tính chất của miền này cũng như toàn bộ miền nằm dưới đường A-T không thể khảo sát bằng các phương trình (2.2)-(2.4) của gần đúng RSA.

4. Vi phạm đối xứng replica (Replica Symmetry Breaking. Viết tắt: RSB)

Sự bất ổn định của nghiệm RSA ở các nhiệt độ dưới T_g dẫn ta đến ý tưởng: ở miền nhiệt độ này *đối xứng replica bị vi phạm*. Cần phải chọn ma trận \mathbf{Q} có cấu trúc phức tạp hơn, cho kết quả hợp lý và không dẫn đến mâu thuẫn nội tại. Nhiều tác giả đã đưa ra những phương pháp khác nhau nhằm vi phạm đối xứng replica, nhưng cho tới nay chỉ có phương pháp Parisi [11-13] là cho kết quả tốt nhất. Sơ đồ vi phạm đối xứng của Parisi gồm vô số bước, bước sau cho kết quả tốt hơn bước trước. Sau đây ta lần lượt xem xét các bước này. Ý nghĩa vật lý của RSB sẽ được làm sáng tỏ trong mục 5.

Để đơn giản cho việc trình bày, sau đây ta xét hệ thủy tinh spin *lý tưởng* khi số liên kết sắt từ và phản sắt từ bằng nhau. Ngoài ra giả thiết là có từ trường ngoài. Trong trường hợp này $J_0 = 0, h \neq 0$ và các phương trình (1.12) - (1.14) trở thành

$$f = -T \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left\{ \frac{J^2 n}{4T^2} - \frac{J^2}{2T^2} \sum_{a < b} Q_{ab}^2 + \ln \text{Tr} \exp \left[\left(\frac{J}{T} \right)^2 \sum_{a < b} Q_{ab} S^a S^b + \frac{h}{T} \sum_a S^a \right] \right\} \quad (4.1)$$

0	q ₁	q ₁	q ₁	q ₀
q ₁	0	q ₁	q ₁	
q ₁	q ₁	0	q ₁	
q ₁	q ₁	q ₁	0	
q ₀	0	q ₁	q ₁	q ₁
	q ₁	0	q ₁	q ₁
	q ₁	q ₁	0	q ₁
	q ₁	q ₁	q ₁	0

Hình 2. Ma trận Q với $n = 8$, $m = 4$ sau bước 1 của RSB.

0	q ₂	q ₁	q ₀
q ₂	0		
q ₁	0	q ₂	q ₀
	q ₂	0	
q ₀	0	q ₂	q ₁
	q ₂	0	
	q ₁	0	q ₂
		q ₂	0

Hình 3. Ma trận Q sau bước 2 của RSB ($n = 8, m_1 = 4, m_2 = 2, k = 2$)

$$Q_{ab} = \langle S^a S^b \rangle = \langle \langle S^a S^b \rangle_T \rangle, \quad a \neq b \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial Q_{ab}} = 0 \quad (4.3)$$

4.1 Bước thứ nhất

Ở bước thứ nhất của quá trình vi phạm đối xứng replica, ta chia n replica thành n/m nhóm, mỗi nhóm gồm m replica [11-12]. Đương nhiên m và n/m phải là các số nguyên. Ma trận Q được chọn như sau: $Q_{ab} = q_1$ nếu các replica a và b thuộc cùng một nhóm, $Q_{ab} = q_0$ nếu chúng thuộc các nhóm khác nhau, còn các phần tử chéo $Q_{aa} = 0$ nên không xét đến. Có thể mô tả ma trận này như sau

$$Q_{ab} = \begin{cases} q_1 & \text{nếu } I(a/m) = I(b/m) \\ q_0 & \text{nếu } I(a/m) \neq I(b/m) \end{cases} \quad (4.4)$$

trong đó $I(x)$ là hàm trị nguyên (Theo định nghĩa, hàm này nhận trị số nguyên nhỏ nhất, nhưng lớn hơn hoặc bằng x . Thí dụ: $I(0.5) = 1, I(1.0) = 1, I(1.5) = 2$). Trên hình 2 là dạng tường minh của ma trận Q định nghĩa theo (4.4).

Với ma trận Q đã chọn, có thể dễ dàng tính các biểu thức chứa Q_{ab} trong (4.1). Chẳng hạn:

$$\frac{1}{n} \sum_{a < b} Q_{ab}^2 = \frac{1}{2} [q_1^2(m-1) + q_0(n-m)] \quad (4.5)$$

Thay biểu thức trên vào (4.1) rồi cho n tiến tới không, ta thu được biểu thức sau đây cho năng lượng tự do ($\beta \equiv 1/T, J \equiv 1$):

$$f(q_1, q_0, m) = -\frac{\beta}{4} [1 + mq_0^2 + (1-m)q_1^2 - 2q_1] - \ln 2 - \frac{1}{m} \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi q_0}} e^{-z^2/2q_0} \times \ln \left\{ \int \frac{dy}{\sqrt{2\pi(q_1 - q_2)}} \exp \left[-\frac{(y-h)^2}{2(q_1 - q_2)} \right] \cosh^m(y+z)\beta \right\} \quad (4.6)$$

Nếu cho $m = 0$ hoặc $m = 1$, từ (4.6) ta trở lại biểu thức (2.2) của năng lượng tự do trong gần đúng RSA với $q = q_0$ và $q = q_1$ một cách tương ứng.

Để tìm cực trị của năng lượng tự do, cần thay (4.6) vào $\partial f / \partial q_{1,2} = \partial f / \partial m = 0$. Từ đó suy ra phương trình cho các thông số $q_{1,2}$. Vì những phương trình này rất dài nên dưới đây sẽ chỉ dẫn ra một vài kết quả đáng lưu ý nhất [11-12].

a) Ở nhiệt độ thấp, entropy S vẫn âm nhưng độ âm của S giảm đáng kể so với trong gần đúng RSA. Tại $T = 0$, bước một RSB cho $S = -0.01$ trong khi gần đúng RSA cho $S = -0.17$. Nếu thực hiện tiếp bước hai RSB, ta sẽ được $S = -0.004$.

b) Ở nhiệt độ gần T_g , trị riêng âm nhất của ma trận \mathbf{G} có độ lớn bằng $-C(T - T_g)^2/9$ (C là một hằng số dương), trong khi tính theo RSA thì trị riêng này có độ lớn $-C(T - T_g)^2$. Như vậy tuy nghiệm thu được ở bước một RSB vẫn chưa ổn định, nhưng độ bất ổn định của nghiệm này đã giảm tới chín lần so với nghiệm thu được trong gần đúng RSA.

Những kết quả trên cho thấy dù chưa hoàn hảo nhưng những phương trình thu được sau bước một của RSB đã tốt hơn rất nhiều so với các phương trình tương ứng của RSA. Do đó ta hy vọng thu được nghiệm chính xác cho mô hình S-K bằng cách thực hiện những bước tiếp theo của RSB.

4.2 Vi phạm toàn phần đối xứng replica: Bước cuối cùng

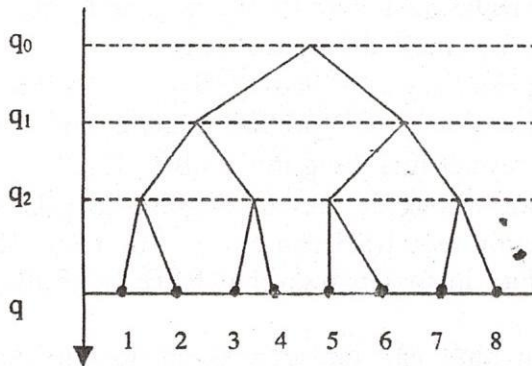
Nhằm thực hiện các bước tiếp theo, ta đưa ra tập hợp số nguyên m_i ($i = 1, 2, \dots, k + 1$) sao cho $m_0 = n$ và $m_{k+1} = 1$. Ngoài ra các tỉ số m_i/m_{i+1} phải nhận các trị nguyên. Dem chia n replica thành n/m_1 nhóm, mỗi nhóm chứa m_1 replica. Rồi lại chia mỗi nhóm con gồm m_1 replica thành m_1/m_2 nhóm nhỏ hơn, mỗi nhóm chứa m_2 replica; và cứ tiếp tục như vậy. Các phần tử Q_{ab} của ma trận (4.2) được định nghĩa như sau [11-12]:

$$Q_{ab} = q_i \quad \text{nếu } I(a/m_i) \neq I(b/m_i), \quad I(a/m_{i+1}) = I(b/m_{i+1}) \quad (4.7)$$

Trong (4.8), $\{q_i\}$ là tập hợp gồm $k + 1$ thông số thực. Dễ thấy $k = 0$ chính là gần đúng RSA, còn $k = 1$ ứng với bước 1 của sơ đồ RSB. Trên hình 3 là dạng tường minh của ma trận \mathbf{Q} định nghĩa bởi (4.8) cho trường hợp $n = 8, m_1 = 4, m_2 = 2, k = 2$. Ta cũng có thể mô tả ma trận này bằng *cây phả hệ* (hierarchical tree) như trên hình 4. Trên hình vẽ này các điểm \bullet tượng trưng cho các replica, độ dài các đoạn thẳng trên trục tung cho biết độ lớn q_i , còn Q_{ab} bằng q_i nếu các nhánh cây từ các điểm a và b trên mức i nhập làm một.

Sau k bước áp dụng cách tham số hóa (4.7), ta thu được ma trận \mathbf{Q} kích thước $n \times n$, chứa $k + 1$ thông số q_i và k thông số m_i . Tiếp theo ta cần tính các biểu thức kiểu $\sum Q_{ab}^2$, rồi thay vào (4.1) và cho n tiến tới không. Ở giới hạn $n \rightarrow 0$, tập hợp số nguyên m_i được thay thế bởi tập hợp các biến m_i nhận giá trị trong khoảng từ 0 tới 1.

$$0 \leq m_i \leq m_{i+1} \leq 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k \quad (4.8)$$



Hình 4. Mô tả ma trận Q ở hình 3 bằng cây phả hệ.

Việc tiếp theo là cho k tiến tới vô hạn. Ở giới hạn này m_i trở thành một biến x liên tục biến thiên trong khoảng $[0, 1]$. Còn tập hợp thông số q_i được thay thế bởi hàm $Q(x)$

$$Q(x) = q_i, \quad m_i \leq x \leq m_{i+1} \quad (4.9)$$

Nhờ các phép biến đổi trên, ta có

$$\lim_{n \rightarrow 0} \sum_{a < b} Q_{ab}^2 = - \lim_{n \rightarrow 0, k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k (m_{i+1} - m_i) q_i^2 = - \int_0^1 Q^2(x) dx \quad (4.10)$$

Thay (4.10) vào (4.1), ta thu được năng lượng tự do f như một phiếm hàm của $Q(x)$. Muốn có phương trình cho $Q(x)$, cần thay $f[Q(x)]$ vào $\partial f[Q(x)] / \partial Q(x)$. Trong mục 6 sẽ dẫn ra đầy đủ các phương trình cho hàm $Q(x)$. Còn bây giờ ta tóm tắt một số kết quả quan trọng của sơ đồ vi phạm đối xứng replica sau k bước khi $k \rightarrow \infty$:

- a) Ở nhiệt độ không tuyệt đối, entropy của hệ bằng không: $S(T = 0) = 0$.
- b) Các trị riêng của ma trận G (1.17) không âm ở mọi nhiệt độ. Điều này đảm bảo cho nghiệm Parisi luôn luôn ổn định (với mọi trị riêng đều dương) hoặc giả ổn định (với ít nhất một trị riêng bằng không).
- c) Nếu đối xứng replica không bị vi phạm thì $Q(x)$ là một hằng số không phụ thuộc x và ta trở lại các phương trình (2.2)-(2.4) của gần đúng RSA. Nếu đối xứng replica bị vi phạm, hàm $Q(x)$ phụ thuộc vào biến số x . Như vậy hàm $Q(x)$, kết quả của việc tham số hóa ma trận Q_{ab} , đóng vai trò thông số trật tự trong lý thuyết Parisi.

5. Ý nghĩa vật lý của sự vi phạm đối xứng replica. Siêu metric

Mặc dù lý thuyết Parisi cho những kết quả hợp lý, trong một thời gian khá lâu người ta không hiểu được ý nghĩa vật lý của RSB. Mãi đến khi công trình [13] của Parisi được công bố, vấn đề này mới được sáng tỏ.

Để hiểu mối quan hệ giữa RSB với vật lý thủy tinh spin, ta cần nhớ rằng (xem phần 1 bài [7]), ở nhiệt độ dưới T_g frustrations dẫn đến sự hình thành của

vô số trạng thái suy biến, bị phân cách bởi các hàng rào năng lượng có chiều cao tiến đến vô hạn ở giới hạn nhiệt độ $N \rightarrow \infty$. Khi $T \rightarrow 0$, số trạng thái này vô cùng lớn. Ta gọi những trạng thái này là *các thung lũng* hoặc *các trạng thái thuần khiết* (pure states) để phân biệt với trạng thái Gibbs là trạng thái có thể viết dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các trạng thái thuần khiết [13, 3]. Từ bức tranh định tính về trạng thái thủy tinh spin [7], ta biết rằng chính sự tồn tại của những hàng rào năng lượng cao vô cùng giữa những trạng thái thuần khiết là nguyên nhân gây nên các quá trình không cân bằng trong thủy tinh spin.

Parisi cho rằng thông số trật tự vật lý của pha thủy tinh spin phải mô tả được đặc tính quan trọng này. Gọi m_i^α và m_i^β là trị trung bình của spin S_i trong các trạng thái thuần khiết α và β :

$$m_i^\alpha = \langle S_i \rangle_\alpha, \quad m_i^\beta = \langle S_i \rangle_\beta \quad (5.1)$$

(các chỉ số α và β đánh số các trạng thái thuần khiết). Khi ấy đại lượng

$$q_{\alpha\beta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i^\alpha m_i^\beta, \quad 0 \leq q_{\alpha\beta} \leq 1 \quad (5.2)$$

cho ta biết độ giống nhau hay *độ phủ nhau* giữa các trạng thái α và β . Còn đại lượng

$$d_{\alpha\beta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (m_i^\alpha - m_i^\beta)^2 = 2[q(1) - q_{\alpha\beta}] \quad (5.3)$$

có thể xem như *khoảng cách* giữa các trạng thái α và β trong không gian pha. Để mô tả các đại lượng ngẫu nhiên q , Parisi đưa ra hàm phân bố $P(q)$:

$$P(q) = \ll P_J(q) \gg \quad (5.4)$$

với

$$P_J(q) = \sum_{\alpha, \beta} P_\alpha P_\beta \delta(q - q_{\alpha\beta}) \quad (5.5)$$

trong đó P_α và P_β là trọng số thống kê của các trạng thái α và β . Hàm $P(q)$ cho xác suất để các trạng thái α và β có độ phủ $q_{\alpha\beta} = q$, còn đại lượng $P(q)dq$ là xác suất để $q_{\alpha\beta}$ nhận các giá trị trong khoảng q đến $q + dq$. Do đó đại lượng

$$x(q) = \int_0^q P(q') dq', \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (5.6)$$

cho xác suất để $q_{\alpha\beta}$ nhận giá trị không lớn hơn q ($q_{\alpha\beta} \leq q$). Từ (5.6) ta có

$$P(q) = dx(q)/dq \quad (5.7)$$

Do $x(q)$ là một hàm biến thiên đơn điệu, ta có thể xác định được hàm ngược $q(x)$ của nó. Theo định nghĩa, hàm $q(x)$ này tăng đơn điệu khi x tăng. Trong pha thuận từ hoặc sắt từ, không gian trạng thái chưa bị phân chia nên $q_{\alpha\beta}$ chỉ nhận một giá trị duy nhất là $q_{\alpha\alpha}$ và do đó $q(x) = \text{const}$. Trong pha thủy tinh spin, không gian trạng thái bị phân chia thành vô số thung lũng nên hàm $q(x)$ phụ thuộc vào x . Như thế, sự phụ thuộc của q vào x là tín hiệu cho biết hệ đã chuyển sang pha thủy tinh spin. Hàm $q(x)$ được gọi là *thông số Parisi* và chính là *thông số trật tự vật lý* phản ánh đặc điểm quan trọng nhất của trạng thái thủy tinh spin.

Lý thuyết thủy tinh spin đã tiến một bước đáng kể khi Parisi [13] lần đầu tiên chứng minh được rằng chính thông số trật tự vật lý $q(x)$ này lại trùng với hàm $Q(x)$ mà trước đây ông đã thu được nhờ vi phạm đối xứng replica (xem mục 4):

$$q(x) = Q(x) \tag{5.8}$$

Điều này sau đó đã được khẳng định lại bằng những cách chứng minh khác [14, 15]. Trong [15], các tác giả cho rằng có thể xem không gian của các replica như không gian của các trạng thái thuần khiết (hay của các thung lũng). Như vậy sự vi phạm đối xứng replica trong phương pháp replica (một phương pháp toán học thuần túy) đã trở nên hết sức rõ ràng về mặt vật lý: đó chẳng qua là một cách diễn đạt toán học việc không gian pha bị phân chia thành vô số thung lũng bị phân cách bởi các rào năng lượng cao vô cùng ở nhiệt độ thấp ($T < T_g$).

Nhờ phương pháp vi phạm đối xứng replica, Parisi và cộng sự [14] còn chứng minh được *tính siêu metric* của không gian pha mà ta đã có dịp nói đến trong mục 1.5 bài [7]. Để làm việc này trước tiên ta định nghĩa hàm $P(q_1, q_2, q_3)$

$$P(q_1, q_2, q_3) = \ll \sum_{\alpha, \beta, \gamma} P_\alpha P_\beta P_\gamma \delta(q_1 - q_{\alpha\beta}) \delta(q_2 - q_{\alpha\gamma}) \delta(q_3 - q_{\beta\gamma}) \gg \tag{5.9}$$

là hàm cho xác suất để ba trạng thái α, β, γ có các độ phù tương ứng là $q_{\alpha\beta} = q_1, q_{\alpha\gamma} = q_2, q_{\beta\gamma} = q_3$. Việc tính hàm này dựa trên phương pháp tham số hóa Parisi cho kết quả:

$$\begin{aligned} P(q_1, q_2, q_3) &= \lim_{n \rightarrow 0} [n(n-1)(n-2)]^{-1} \sum_{a \neq b \neq c} \delta(Q_{ab} - q_1) \delta(Q_{ac} - q_2) \delta(Q_{bc} - q_3) = \\ &= \frac{1}{2} P(q_1) x(q_1) \delta(q_1 - q_2) \delta(q_1 - q_3) + \frac{1}{2} P(q_1) P(q_2) \theta(q_1 - q_2) \delta(q_2 - q_3) + \\ &\quad + \frac{1}{2} P(q_2) P(q_3) \theta(q_2 - q_3) \delta(q_3 - q_1) + \frac{1}{2} P(q_3) P(q_1) \theta(q_3 - q_1) \delta(q_1 - q_2) \end{aligned} \tag{5.10}$$

Từ đây dễ thấy hàm $P(q_1, q_2, q_3)$ khác không chỉ khi ít nhất có hai độ phù bằng nhau và không lớn hơn độ phù thứ ba. Đây là hệ quả trực tiếp của cấu trúc pha

hệ của ma trận Q trong RSB. Kết hợp (5.10) với (5.3), ta thấy khoảng cách giữa các thung lũng trong không gian pha thỏa mãn bất đẳng thức:

$$d_{\alpha\beta} \leq \max(d_{\alpha\gamma}, d_{\beta\gamma}), \quad (5.11)$$

nghĩa là trong không gian pha chỉ có thể tồn tại các tam giác cân hoặc các tam giác đều. Trong toán học, không gian có tính chất như vậy gọi là *không gian siêu metric* để phân biệt với *không gian thông thường*, nơi mà bất đẳng thức sau đây luôn được thỏa mãn

$$d_{\alpha\beta} \leq d_{\alpha\gamma} + d_{\beta\gamma} \quad (5.12)$$

6. Hệ phương trình trạng thái của thủy tinh spin

Nhằm thu nhận những phương trình cho phép khảo sát các đại lượng vật lý đặc trưng cho hệ như năng lượng tự do f , thông số trật tự Parisi $q(x)$, độ từ hóa m, \dots ta cần thay (4.7) vào (4.1) và cho $n \rightarrow 0$, rồi thực hiện phép lấy biến phân f theo $q(x)$ và m . Kết quả là năng lượng tự do f được biểu diễn qua $q(x)$ như sau [16]:

$$f[q(x)] = -\frac{J^2}{4T} [1 - 2q(1)] + \int_0^1 q^2(x) dx - [2\pi q(0)]^{-1/2} \int \varphi(0, y) \exp \left[-\frac{(y-h)^2}{2J^2 q(0)} \right] dy \quad (6.1)$$

Trong (6.1), hàm $\varphi(x, y)$ thỏa phương trình

$$\dot{\varphi} = -\frac{J^2}{2} \dot{q} (\varphi'' + \frac{x}{T} \varphi'^2) \quad (6.2)$$

với điều kiện biên

$$\varphi(1, y) = T \ln[2 \cosh(y/T)] \quad (6.3)$$

Ở đây ta qui ước

$$\dot{\varphi}(x, y) \equiv \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}, \quad \varphi'(x, y) \equiv \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}$$

Lấy biến phân phiếm hàm (6.1) theo $q(x)$, ta thu được các phương trình cho thông số trật tự Parisi $q(x)$ và độ từ hóa m [11, 17]

$$q(x) = J^{-1} \int M^2(x, y) P(x, y) dy, \quad (6.4)$$

$$m = J^{-1} \int M(0, y) P(0, y) dy \quad (6.5)$$

trong đó $M(x, y) \equiv \varphi'(x, y)$, còn hàm $P(x, y)$ thỏa phương trình

$$\dot{P} = \frac{J^2}{2} \dot{q} \left[P'' - \frac{2x}{T} (P\varphi')' \right] \quad (6.6)$$

với điều kiện biên

$$P(0, y) = [2\pi q(0)]^{-1/2} \exp \left[-\frac{(y-h)^2}{2J^2 q(0)} \right] \quad (6.7)$$

Đạo hàm biểu thức (6.4) theo x và sử dụng (6.2), (6.6) ta thu được phương trình

$$\int dy P(x, y) [M'(x, y)]^2 = 1 \quad (6.8)$$

Các công thức (6.1) - (6.8) hợp thành một hệ phương trình khép kín cho phép khảo sát tính chất của hệ thủy tinh spin lý tưởng ($J_0 = 0$) trong pha thuận từ (pha ergodic) cũng như pha thủy tinh spin (pha phi ergodic). Khi $T \geq T_g$, hệ phương trình trên sẽ quay trở về các phương trình của gần đúng RSA. Thật vậy, khi $T \geq T_g$ các hàm $P(x, y)$ và $\varphi(x, y)$ không phụ thuộc vào x và ta có thể thay thế chúng bằng các hàm $P(0, y)$ và $\varphi(1, 0)$ một cách tương ứng. Khi ấy các phương trình (6.4), (6.5) trở về dạng (2.3), (2.4), còn phương trình (6.8) qui trở về phương trình A-T (3.1).

Do (6.1) - (6.8) là một hệ phương trình vi-tích phân phức tạp nên chỉ có thể tìm nghiệm giải tích của nó ở gần nhiệt độ chuyển pha T_g khi tham số $\tau \equiv (T_g - T)/T_g \ll 1$. Tuy nhiên từ hệ phương trình trên, ta cũng có thể rút ra một số tính chất quan trọng của hệ ở miền nhiệt độ thấp.

Lấy đạo hàm năng lượng tự do (6.1) theo T , ta thu được biểu thức cho entropy

$$S = -\frac{\partial f}{\partial T} = -\frac{(1-q(1))^2}{4T^2} + \int dy P(1, y) \left[\ln(2 \cosh \frac{y}{T}) - \frac{y}{T} \tanh \frac{y}{T} \right] \quad (6.9)$$

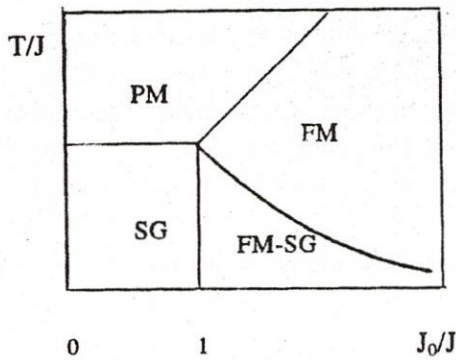
Tại điểm $x = 1$, từ (6.8) ta có

$$(J/T)^2 \int dy P(1, y) \cosh^{-4}(y/T) = 1 \quad (6.10)$$

Trên thực tế, chỉ có các giá trị $y \leq T$ là cho đóng góp chính vào tích phân trên nên đẳng thức (6.10) sẽ nghiệm đúng khi $P(1, yT)/T \rightarrow \text{const}$ ở giới hạn $T \rightarrow 0$. Do đó từ (6.4) suy ra $1 - q(1) \sim T^2$, còn từ (6.9) ta có $S \sim T^2$ khi $T \rightarrow 0$. Như vậy entropy $S \geq 0$ ở nhiệt độ thấp và lý thuyết Parisi tránh được mâu thuẫn nội tại mà gần đúng RSA gặp phải ($S(0) < 0$).

Đạo hàm độ từ hóa (6.5) theo từ trường ngoài h và lưu ý $M(0, y)$ là hàm lẻ, ta thu được biểu thức sau đây cho độ cảm từ

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial h} \Big|_{h \rightarrow 0} = \lim_{h \rightarrow 0} J^{-1} \int dy P(0, y) M'(0, y) \quad (6.11)$$



Hình 5. Giản đồ pha của hệ sắt từ mất trật tự theo lý thuyết Parisi. Pha thuận từ: PM, pha sắt từ: FM, pha thủy tinh spin thuần khiết: SG, pha hỗn hợp: FM-SG

Khi $h \rightarrow 0$, thông số $q(0)$ tiến đến không và từ (6.7) ta có $P(0, y) \rightarrow J\delta(y)$. Do đó từ (6.11) suy ra $\chi = M'(0, 0)$. Mặt khác, tại điểm $x = 0$ hệ thức (6.8) cho $M'(0, 0) = 1/J$. Từ đó suy ra rằng ở nhiệt độ $T < T_g$, độ cảm từ không phụ thuộc T và bằng $1/J$. Điều này phù hợp định tính với kết quả đo độ cảm từ cân bằng (xem mục 2.1 bài [7]).

Cho đến giờ ta mới xét trường hợp $J_0 = 0$. Có thể mở rộng phương trình trạng thái (6.1)-(6.8) cho trường hợp $J_0 \neq 0$. Khi ấy các tính toán tương tự cho

$$\chi = (J - J_0)^{-1}, \quad J_0 < J \tag{6.12}$$

nghĩa là độ cảm từ phân kỳ tại $J_0 = J$. Điều này cho phép xác định ranh giới giữa pha thủy tinh spin thuần khiết (SG) nơi mà trật tự từ xa bằng không ($m = 0$) với pha hỗn hợp FM-SG nơi vừa có trật tự từ ($m \neq 0$) lại vừa quan sát được các hiện tượng không cân bằng ($\dot{q}(x) \neq 0$). Theo lý thuyết Parisi, giản đồ pha bây giờ có dạng như trên hình 5. Nếu $J_0 > J$ và giảm nhiệt độ, trong hệ sẽ xảy ra hiện tượng chuyển pha trở lại $PM \rightarrow FM \rightarrow FM-SG$. Còn nếu $J_0 < J$ thì hệ chỉ có thể chuyển từ pha thuận từ ($m = 0, q(x) = 0$) sang pha thủy tinh spin thuần khiết ($m = 0, q(x) \neq 0$). Những kết luận này phù hợp định tính với những gì quan sát trên thực nghiệm (xem mục 2.4 bài [7]).

7. Tóm tắt kết quả lý thuyết trường trung bình

Trong các mục từ 1 đến 6, ta đã trình bày hình thức luận lý thuyết trường trung bình áp dụng cho thủy tinh spin. Bây giờ ta hãy tập hợp lại những điểm chính của lý thuyết này, nhằm đưa ra một bức tranh tương đối toàn diện về thủy tinh spin.

1) Điểm xuất phát của lý thuyết trường trung bình là mô hình S-K với tương tác J_{ij} thay đổi ngẫu nhiên theo phân bố Gauss (1.2) và không phụ thuộc vào khoảng cách giữa các spin (mô hình bán kính tương tác vô hạn). Để tính năng lượng tự do f , ta dùng phương pháp replica như một thủ thuật toán cho phép đưa việc tính trung bình $\ln Z$ theo mất trật tự về việc tính $\ll Z^n \gg$ với $n \rightarrow 0$. Nhờ đó f trở thành một phiếm hàm của ma trận replica $Q = \{Q_{ab}\}$ với Q_{ab} được xác định từ điều kiện (1.14).

2) Trong gần đúng đối xứng replica (RSA), hệ phương trình trạng thái (2.2) - (2.4) chỉ cho phép mô tả các tính chất của hệ ở miền phía trên đường A-T (xem giản đồ trên hình 1 và 5). Phía dưới đường A-T, đối xứng replica bị vi phạm và sơ đồ vi phạm đối xứng Parisi biến Q_{ab} thành một hàm số $Q(x)$, $0 \leq x \leq 1$. Phía trên đường A-T, hàm $Q(x) = const$. Phía dưới đường A-T, hàm $Q(x)$ phụ thuộc vào biến x .

3) Mặt khác, từ những lập luận về bản chất vật lý trạng thái thủy tinh spin, ta có thể đưa ra thông số trật tự vật lý $q(x)$ và hàm phân bố $P(q)$. Sự phụ thuộc của thông số $q(x)$ vào x là tín hiệu cho biết hệ đã chuyển sang trạng thái thủy tinh spin. Dùng sơ đồ RSB, có thể chứng minh rằng $q(x) = Q(x)$. Như vậy sự vi phạm đối xứng replica là một cách diễn đạt hiện tượng phân chia không gian pha ở $T < T_g$. Cũng bằng sơ đồ RSB, có thể chứng minh rằng không gian pha này có cấu trúc siêu metric và được mô tả bằng cây phả hệ.

4) Bằng sơ đồ RSB của Parisi và phương pháp biến phân, đã xây dựng được hệ phương trình tự hợp (6.1) - (6.8) cho phép mô tả thủy tinh spin ở cả hai phía trên và dưới đường A-T. Các kết thu được từ những phương trình này mô tả định tính khá tốt một số hiện tượng quan sát được trên thực nghiệm.

Trên đây ta vừa trình bày lý thuyết trường trung bình cho các hệ sắt từ mất trật tự có frustrations. Lý thuyết này sau đó đã được mở rộng sang cho các hệ từ mất trật tự đa phân mạng có frustrations như phản sắt từ [18] và ferri từ [19]. Một trong những kết quả thú vị nhất của các lý thuyết này là nếu như trong hệ sắt từ, từ trường ngoài h luôn luôn làm giảm nhiệt độ chuyển pha $T_g(h)$ sang pha thủy tinh spin và do đó thu hẹp pha này, thì trong các hệ phản sắt từ và ferri từ, từ trường ngoài h có thể làm tăng $T_g(h)$ và do đó mở rộng miền tồn tại của pha thủy tinh spin [18, 19]. Tiên đoán lý thuyết này đã được khẳng định bởi thực nghiệm [20, 21].

8. Giới hạn của lý thuyết trường trung bình

Nhờ phương pháp Parisi, mô hình S-K có thể giải chính xác và cho hệ phương trình trạng thái (6.1) - (6.8). Tuy nhiên mô hình S-K là mô hình bán kính tương tác vô hạn trong khi đối với những hệ thực thì tầm tương tác bao giờ cũng hữu hạn. Do đó câu hỏi được đặt ra là: liệu bức tranh định tính của lý thuyết trường trung bình có đúng cho các hệ thực hay không?

Về nguyên tắc, để trả lời cho câu hỏi trên ta phải xét các mô hình thủy tinh spin có bán kính tương tác hữu hạn với sự trợ giúp của các phương pháp gần đúng, chẳng hạn lý thuyết nhiễu loạn [22-24]. Ở đây lý thuyết Parisi được coi là nghiệm gần đúng bậc không, còn r_{ij}^{-1} là tham số bé mà theo đó ta thực hiện các khai triển trong lý thuyết nhiễu loạn. Một hướng tiếp cận khác cho vấn đề nêu trên là phương pháp nhóm tái chuẩn hóa [25, 26]. Tuy nhiên cho đến nay những nỗ lực nghiên cứu theo các hướng này đều chưa mang lại kết quả mong muốn (hoặc không vượt qua nổi những khó khăn toán học, hoặc cho kết quả không phù hợp với thực nghiệm).

Muốn biết giới hạn ứng dụng của lý thuyết trường trung bình, ta phải xác định được số chiều tới hạn d_c [27, 2]. Nếu d_c nhỏ hơn số chiều không gian d của hệ thì ta có thể yên tâm rằng lý thuyết trường trung bình tiên đoán đúng một cách định tính các tính chất của hệ thực. Chẳng hạn đối với các hệ từ mất trật tự trong không gian ba chiều ($d = 3$) mà ta đang quan tâm, nếu $d_c < 3$ thì sẽ có chuyển pha sang trạng thái thủy tinh spin, còn nếu $d_c > 3$ thì ngược lại. Do chưa xây dựng được một lý thuyết giải tích cho các thủy tinh spin với bán kính tương tác hữu hạn, người ta khảo sát các hệ này bằng các phương pháp mô hình hóa chúng trên máy tính. Hiện nay mọi người đều thống nhất rằng đối với mô hình Ising thì $d_c < 3$ nghĩa là ở nhiệt độ hữu hạn, chuyển pha sang trạng thái thủy tinh spin có thể xảy ra trong không gian ba chiều đối với mô hình này.

Đối với mô hình Heisenberg, tình hình phức tạp hơn nhiều. Các tính toán trước đây cho thấy, đối với mô hình này $d_c > 3$ [30, 31]. Nhưng mới đây [32] bằng lý thuyết tái chuẩn hóa vách đomen, Maucourt và Gempel lại khẳng định rằng $d_c < 3$. Tuy nhiên các tính toán trên đây mới chỉ thực hiện trên các hệ có kích thước rất nhỏ. Để giải quyết vấn đề chuyển pha trong không gian ba chiều của hệ Heisenberg, cần phải xét hệ có kích thước lớn hơn. Nhưng điều này đòi hỏi phải có những phương pháp tính số hiệu quả hơn hoặc có được những siêu máy tính với tốc độ nhanh hơn.

Hiện nay người ta cho rằng có thể mô tả các thủy tinh spin với tương tác gần nhờ lý thuyết giọt (droplet theory) khởi xướng bởi Fisher và Huse[33]. Chúng tôi hy vọng sẽ trình bày lý thuyết này trong bài tổng quan sắp tới.

Kết luận

Lý thuyết trường trung bình mô tả khá tốt các tính chất tĩnh của thủy tinh spin ở miền nhiệt độ thấp. Bức tranh vật lý mà lý thuyết này mang lại đã giúp cho các nhà vật lý hiểu một cách định tính những gì xảy ra trong thủy tinh spin ở miền nhiệt độ thấp. Tuy nhiên tất cả những gì lý thuyết trường trung bình mang lại mới chỉ là định tính chứ chưa phải là định lượng và không loại trừ khả năng chưa phản ánh được hết những đặc điểm định tính của thủy tinh spin. Do đó lý thuyết này được xem như giai đoạn ban đầu của quá trình xây dựng một lý thuyết giải tích, nhất quán và hoàn chỉnh cho thủy tinh spin. Tình trạng tương tự như vậy cũng từng xảy ra trước đây khi xây dựng được lý thuyết trường phân tử cho các hệ từ trật tự.

Như vậy, dù được đặt đúng hướng nhưng tới nay bài toán thủy tinh spin vẫn chưa giải quyết xong. Việc nghiên cứu loại vật liệu từ đặc biệt này hiện đang thu hút sự quan tâm và nỗ lực của nhiều nhà vật lý trên thế giới cả về thực nghiệm và lý thuyết.

Cảm ơn

Cảm ơn GS Nguyễn Ngọc Giao và GS Nguyễn Văn Trọng đã động viên khuyến khích chúng tôi viết bài tổng quan này. Đặc biệt, xin chân thành cảm ơn TS Mai Suân Lí về những nhận xét và góp ý vô cùng quý báu cho bài viết này.

SPIN GLASSES: The Mean Field Theory

Hoang Zung

Abstract: This review is devoted to the mean field theory for spin glasses whose the most important properties are given in [7]. The Sherrington-Kirkpatrick model with infinite-ranged interaction and its solution are presented. The replica-symmetric solution and its instability are discussed. The replica symmetry breaking scheme is demonstrated and the physics behind it is discussed. The closed system of the state equations for spin glasses and its properties at low temperatures are considered. It is shown that the mean field theory qualitatively describes many static properties of spin glasses.

Tài liệu tham khảo

- [1] K. Fischer, Phys. Stat. Sol. 116, 357 (1983); 130, 13 (1985)
- [2] K. Binder and A.P. Young, Rev. Mod. Phys. 58, 801 (1986).
- [3] M. Mezard, G. Parisi, M. Virasoro, *Spin-Glass Theory and beyond* (World Scientific, Singapore 1987)
- [4] I.Ya. Korenblit and E.F. Shender, Usp. Fiz. Nauk 157, 267 (1989)
- [5] K.H. Fischer and J.A. Hertz, *Spin Glasses* (Cambridge University Press, Cambridge 1991)
- [6] V.S. Dotsenko, Usp. Fiz. Nauk 163, 1 (1993)
- [7] Hoàng Dũng, Tạp chí Phát triển Khoa học và Công nghệ, số 1, tập 5, tr. 50 - 65 (1998)
- [8] D. Sherrington and S. Kirkpatrick, Phys. Rev. Lett. 35, 1792 (1975); Phys. Rev. B17, 4384 (1978)
- [9] S.F. Edwards and P.W. Anderson, J. Phys. F5, 965 (1975)
- [10] J.R.L. de Almeida and D.J. Thouless, J. Phys. A 11, 983 (1978)
- [11] G.Parisi, Phys. Lett. 77A, 203 (1979); J. Phys. A 13, L115 (1980)
- [12] G. Parisi, J. Phys. A 13, 1101 (1980)
- [13] G. Parisi, Phys. Rev. Lett. 50, 1946 (1983)

- [14] M. Mezard, G. Parisi, N. Sourlas, G. Toulouse and M. Virasoro, J. Phys. 45, 843 (1984)
- [15] M. Mezard and M. Virasoro, J. Phys. 46, 1293 (1985)
- [16] B. Duplantier, J. Phys. A 14, 283 (1981)
- [17] H.J. Sommers and W. Dupont, J. Phys. C 17, 5785 (1984)
- [18] I.Ya. Korenblit, Ya.V. Feodrov, E.F. Shender, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 92, 710 (1987); J. Phys. C 20, 1835 (1987)
- [19] I.Ya. Korenblit, Ya.V. Feodrov, H. Zung, Fiz. Tverd. Tela 32, 1441 (1990); M.S. Li, L.Q. Nguyen, A.V. Vedyayev, H. Zung, J. Magn. Mater. 96, 175 (1991)
- [20] J. Gelard *et al* J. Phys. C 16, L939 (1983); D. Bertrand *et al* Ibid. 17, 1725 (1984); H. Yoshizawa *et al* Phys. Rev. Lett. 59, 2364 (1987)
- [21] A. Ito, H. Aruga, M. Kikuchi, Y. Syono, H. Takei, Solid State Commun. 66, 475 (1988); H. Aruga, A. Ito, H. Wakabayashi, T. Goto, J. Phys. Soc. Jpn. 57, 2636 (1988)
- [22] H. Sompolinsky and A. Zippelius, Phys. Rev. Lett. 50, 1297 (1984)
- [23] A.V. Goltsev, J. Phys. C17, L241 (1984) 19; L219 (1986)
- [24] I. Kondor and De Dominicis, Europhys. Lett. 2, 617 (1986)
- [25] D.S. Fisher and H. Sompolinsky, Phys. Rev. Lett. 54, 1063 (1985)
- [26] L.B. Ioffe and M.V. Feygelman, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 89, 654 (1985)
- [27] S.K. Ma, *Modern Theory of Critical Phenomena* (Benjamin, New York, 1986)
- [28] A. Bray and M. Moore, J. Phys. C17, L463 (1984); Phys. Rev. B31, 631 (1985)
- [29] W. L. Mc Millan, Phys. Rev. B 30, 476 (1984)
- [30] A. Chakrabarti and C. Dasgupta, Phys. Rev. Lett. 56, 1404 (1986)
- [31] J. A. Olive, A.P. Young and D. Sherrington, Phys. Rev. B 34, 6341 (1986)
- [32] J. Maucourt and D.R. Grempel, Phys. Rev. Lett. 80, 770 (1998)
- [33] D.S. Fisher and D. A. Huse, Phys. Rev. Lett. 56, 1601 (1986)