XÁC ĐỊNH HÌNH DÁNG CÂN BẰNG CỦA KẾT CẤU CĂNG DẠNG MÀNG

Trần Cảnh Dũng – Chu Quốc Thắng
Trường Đại Học Kỹ Thuật
(Bài nhận ngày 13/05/1998)

TÓM TẮT: Trong bài này chúng tôi sẽ trình bày một phương pháp xác định dạng hình học của cũng như dạng đường cong dọc biên chịu ứng suất trước (sức căng ban đầu căng đều ban đầu được xem như một màng mỏng chịu căng trong một khung cứng tuyệt đối. Dạng hình học của nó được trình bày qua một hệ phương trình phi tuyến, chúng xấp xỉ hệ phương trình sai phân hữu hạn (finite difference equation) mà từ đó nó cho một lời giải số.

1. GIỚI THIỆU

Đòi hỏi các kết cấu có diện tích phủ rộng : sân vận động, các nhà kho, trung tâm thể thao thôi thúc tìm ra các dạng kết cấu mới. Một trong các kiểu phổ biến đó là các kết cấu căng. Có nhiều dạng kết cấu căng, ở đây chỉ xem xét kết cấu với những đặc điểm sau:

- Nó gồm dây neo có sức bền keó cao và mạng chịu căng có khối lượng bản thân nhỏ
- Dạng hình học căn bằng cần được xác định trước khi thực hiện phân tích ứng suất – chuyển dị dưới tác dụng của ngoại lực thời tiết (gió, bão, tuyết.....). Các phân tích trên đều phi tuyến hình học và được xem xét với các giả thiết sau :
- Trong màng, sức căng là đều ở mọi điểm và được xem đồng nhất với bề mặt cực tiểu (bề mặt có độ cong bằng 0).
- Giả sử có mặt cong Z=f(x,y), khi đó theo [1] phương trình vi phân hàm hình học của kết cấu chịu lực căng đều :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=2\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial x}=0 \qquad (1)$$

màng có thể được căng giữa các dây mềm, nghĩa là giữa các đường không đồng phẳng và chúng tạo nên dạng cấu trúc không gian. Như vậy, ta sẽ có các phương trình vi phân phi tuyến biểu diễn cho bề mặt và cho các dây biên chịu lực căng đều (giả thiết chiều dài không đổi) mà việc giải về mặt toán học là quá phức tạp và nhiều khi không thực hiện được. Chính vì thế, trong bài này sẽ đề cập đến một cách xử lý phần tử hữu hạn để xác định hình dạng hình học của kết cấu căng có đặc điểm nói trên.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

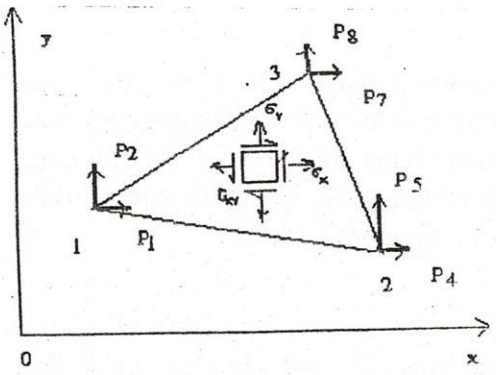
Bề mặt liên tục của kết cấu được xấp xỉ bằng một số hữu hạn các phần tử tam giác với kích thước đủ nhỏ để đảm bảo sự hội tụ cho bài toán.

a. PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

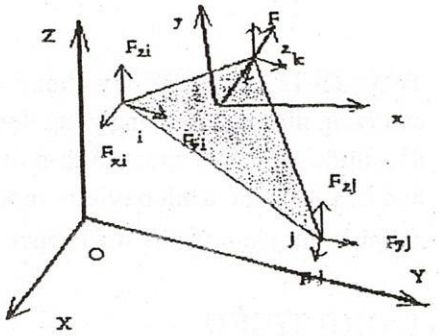
Như đã trình bầy trên, các phần tử có độ cứng uốn bằng 0, vật liệu đẳng hướng tương đương với phần tử màng có bề dày đều và sức căng bề mặt không đổi.

Như vậy kết cấu chịu lực căng không đổi có thể nhận được khi các phần tử màng và các dây dọc biên đạt được vị trí cân bằng vào lúc chưa chịu tác dụng các ngoại lực thời tiết, chính trong trường hợp này chiều dài dây biên không đổi xem như là một điều kiện phụ.

Xét một phần tử màng tam giác bất kỳ, trong phương pháp chuyển vị, chúng ta giả thiết rằng ứng suất trong các phần tử tam giác là không đổi và độ cứng uốn bằng không.



HÌNH 1



HÌNH 2

Áp đặt các lực phần tử tương ứng với trường ứng suất không đổi đã giả định σx, σy và txy (hình 1) lên phần tử tam giác, chúng tương đương các lực đặt tại các đỉnh mà kết quả viết dưới dạng ma trận là như sau :[2] (phần này được nói rõ trong [3])

$$\{P\}_e = \{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7 p_8 p_9\}^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} y_{23} & 0 & 0 & -y_{21} & 0 & 0 & y_{31} & 0 & 0 \\ 0 & -x_{23} & 0 & 0 & x_{21} & 0 & 0 & -x_{31} & 0 \\ -x_{23} & y_{23} & 0 & x_{21} & -y_{21} & 0 & -x_{31} & y_{23} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

trong đó : $k_{ij} = k_i - k_j$ (i,j = 1,2,3; k = x,y).

Phương trình (2) viết trong hệ tọa độ địa phương xyz. Nếu gọi XYZ (hình 2) là hệ tọa độ tổng thể thì vectơ tải $\{P\}_e$ viết trong hệ tọa độ tổng thể XYZ sẽ là : [2]

$$\{F\} = [M]^T . \{P\}_e$$

trong đó :

$$[M] = \begin{bmatrix} [\lambda] & [0] & [0] \\ [0] & [\lambda] & [0] \\ [0] & [0] & [\lambda] \end{bmatrix} \quad (4)$$

và :

$$[\lambda]=\begin{bmatrix} \lambda_{Xx} & \lambda_{Xy} & \lambda_{Xz} \\ \lambda_{Yx} & \lambda_{Yy} & \lambda_{Yz} \\ \lambda_{Zx} & \lambda_{Zy} & \lambda_{Zz} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

[λ] : ma trận biến đổi tọa độ trong đó λ_{ij} là các cosin chỉ phương các trục của hệ tọa độ địa phương trong hệ tọa độ tổng thể.

Vì trạng thái ứng suất là phẳng và chịu kéo đều (căng đều) nên ta có :

$\sigma x = \sigma y = \sigma o$; $\tau xy = 0$ (6)

Từ (2)-(6) ta có :

$$F_{xi} = \frac{1}{2}\left[\frac{-p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.y_{32} - \frac{n}{\sqrt{n^2+n^2+p^2}}.z_{32}\right]\sigma_0$$

$$F_{yi} = \frac{1}{2}\left[\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.x_{32} - \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.z_{32}\right]\sigma_0 \qquad (7)$$

$$F_{zi} = \frac{1}{2}\left[\frac{-n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.y_{32} + \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.y_{32}\right]\sigma_0$$

Theo lý thuyết hình vi phân, phương trình của mặt phẳng được viết :

$$MX + nY + pZ + q = 0 \qquad (8)$$

Phương trình của mặt phẳng phần tử qua các nút i, j, k được viết như sau :

$$\det\begin{vmatrix} X - X_i & Y - Y_i & Z - Z_i \\ X_j - X_i & Y_j - Y_i & Z_j - Z_i \\ X_k - X_i & Y_k - Y_i & Z_k - Z_i \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

từ (8), (9) :

$m = Y_{ij} Z_{ki} - Y_{ki} Z_{ji}$

$n = X_{ij} Z_{ki} - Y_{ki} Z_{ji}$

$p = X_{ij} Y_{ki} - Y_{ki} Y_{ij}$

Trong đó :

$X_{ij} = X_j - X_i$

X_i, Y_i, Z_i : Tọa độ nút I trong hệ tọa độ tổng thể XYZ

Gọi S là diện tích của một phần tử tam giác qua các nút i,j,k, phương trình đạo hàm riêng của S theo X_i, Y_i, Z_I

$$\frac{\partial S}{\partial X_i} = \frac{1}{2}\left[\frac{-p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} y_{ki} - \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} Z_{ki}\right] \qquad (11)$$

$$\frac{\partial S}{\partial Y_i} = \frac{1}{2}\left[\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} X_{ki} - \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} Z_{ki}\right]$$

$$\frac{\partial S}{\partial Z_i} = \frac{1}{2}\left[\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} X_{ki} + \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} Y_{ki}\right]$$

Dễ thấy rằng các phương trình (11) là tương đương với các phương trình (7). Tương tự, các phương trình đạo hàm riêng của S theo $X_jY_jZ_j$ và theo $X_kY_kZ_k$ là tương đương với F_{xi}, F_{yj},F_{zi} và F_{xk},F_{yk},F_{zk}. Vì thế, thành phần chính giá trị dừng của tổng thế năng (với giả thiết các lực căng không đổi) là các lực của phần tử màng được giữ không đổi trong quá trình cực tiểu hóa. Nếu kết cấu gồm nhiều phần tử (hình 3) là cân bằng thì theo [4] [5] hàm tổng thế năng có thể được viết theo dạng như :

$$f = \sum_{u=1}^{m} S_u + \sum_{v=1}^{n} \gamma_v (L_v - C_v) \qquad (12)$$

Trong đó S_u= diện tích của một phần tử tam giác u; γ_v : nhân tử Lagrange

L_v= Chiều dài phần tử dây sau biến dạng; C_v= Chiều dài ban đầu của phần tử dây,

M= số các phần tử màng; n= số phần tử dây

Sự biến đổi của chiều dài của phần tử dây dọc biên v được diễn tả như sau :

$$L_v - C_v = \sqrt{X_{jk}^2 + Y_{jk}^2 + Z_{jk}^2} - \sqrt{\bar{X}_{jk}^2 + \bar{Y}_{jk}^2 + \bar{Z}_{jk}^2} \qquad (13)$$

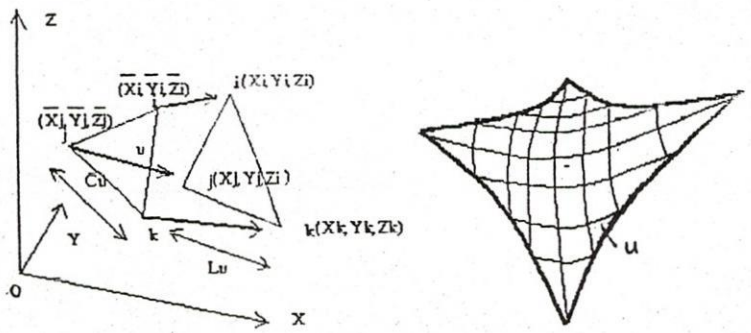
$\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$: hệ tọa độ nút ban đầu, X,Y,Z : Hệ tọa độ nút sau biến dạng

Trong phương trình (12) các biến độc lập là các vị trí nút và các nhân tử Lagrange γ_v

Từ điều kiện dừng của f theo X,Y,Z, ta có :

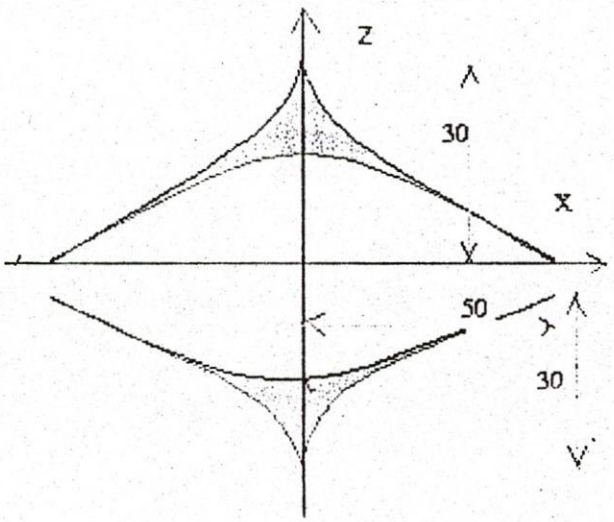
$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{\partial f}{\partial X} = \frac{\partial F}{\partial Z} = 0 \qquad (14)$$

Nghĩa là :



HÌNH 3

$$\sum_{u=1}^{m}\frac{\partial S_u}{\partial X_i}+\sum_{v=1}^{n}\gamma_v\cdot\frac{\partial L_v}{\partial X_i}=0$$
$$\sum_{u=1}^{m}\frac{\partial S_u}{\partial Y_i}+\sum_{v=1}^{n}\gamma_v\cdot\frac{\partial L_v}{\partial Y_i}=0 \qquad (15)$$
$$\sum_{u=1}^{m}\frac{\partial S_u}{\partial Z_i}+\sum_{v=1}^{n}\gamma_v\cdot\frac{\partial L_v}{\partial Z_i}=0$$



Hình 4

.....

Trong đó :

$$\frac{\partial L_v}{\partial X_i}=\frac{X_i}{\sqrt{X_{ij}^2+Y_{ij}^2+Z_{ij}^2}}$$
$$\frac{\partial L_v}{\partial Y_i}=\frac{Y_i}{\sqrt{X_{ij}^2+Y_{ij}^2+Z_{ij}^2}} \qquad (16)$$
$$\frac{\partial L_v}{\partial Z_i}=\frac{Z_i}{\sqrt{X_{ij}^2+Y_{ij}^2+Z_{ij}^2}}$$

Phương trình (15) là phương trình cân bằng tại các nút

Từ điều kiện dừng khác đối với các γ_v, ta có điều kiện các dây biên không đổi, nghĩa là :

$$L_v - C_v = 0 \qquad (17)$$

Phương trình (16) và (17) tạo nên các phương trình cơ bản của phần tử (phần tử tam giác và dây) với các biến là vị trí các nút và nhân tử Lagrange γ_v.

b. PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

Viết lại phương trình cơ sở dưới dạng sau :

$$M_1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial S_i}{\partial X_1} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \frac{L_k}{\partial X_1} = 0$$

$$M_2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial S_i}{\partial Y_1} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \frac{L_k}{\partial Y_1} = 0$$

$$M_3 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial S_i}{\partial Z_1} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \frac{L_k}{\partial Z_1} = 0$$

.....

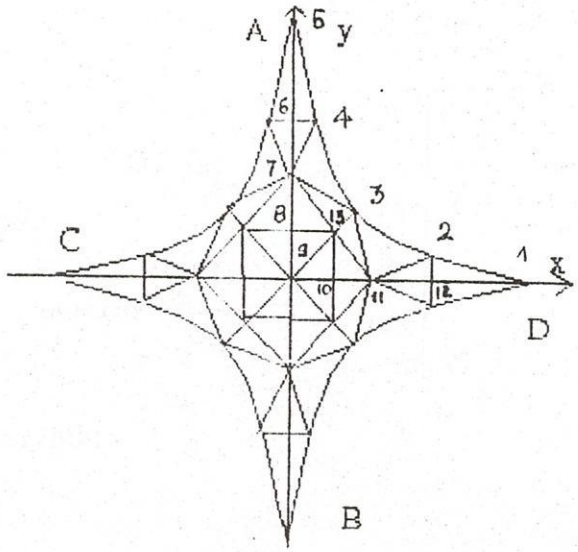
$$M_r = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial S_i}{\partial Z_r} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \frac{L_k}{\partial Z_r} = 0$$

$$M_{r+1} = L_1 - C_1 = 0$$

.....

$$M_{r+n} = L_n - C_n = 0$$

(18)



Hình 5

r: số nút, n : số phần tử dây.

Có thể giải hệ phương trình phi tuyến (18) bằng một số, tuy nhiên ở đây dùng phương pháp lặn Newton-Raphson có thể trình bày một cách vắn tắt sau [6] :

Gọi $(x_i, y_i, z_i, \gamma_v)$ là lời giải nhận được ở bước thứ i, $(x_i + \Delta x_i, y_i + \Delta y_i, z_i + \Delta z_i, \gamma_v + \Delta\gamma_i)$ là lời giải nhận được ở bước thứ I + 1

Hệ phương trình tuyến nhận được ứng với lượng gia tăng $(\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i, \Delta\gamma_i)$ có dạng :

$$\sum \frac{\partial M_1}{\partial X_i} \Delta X_i + \sum \frac{\partial M_1}{\partial Y_i} \Delta Y_i + \sum \frac{\partial M_1}{\partial Z_i} \Delta Z_i + \sum \frac{\partial M_1}{\partial \gamma_v} \Delta\gamma_v + M_1(X_i, Y_i, Z_i, \gamma_v) = 0$$

(19)

Tiến trình được lập lại cho đến khi đạt được độ chính xác mong muốn.

Phương pháp này rất hiệu quả đối với các kết cấu lớn và có dạng bề mặt phức tạp

4. VÍ DỤ

Áp dụng cho một số kết cấu gồm màng được căng giữa bốn cáp (Hình 4)

Chia lưới kết cấu bao gồm 48 phần tử với 33 điểm nút (Hình 5).

Giả thiết rằng ban đầu nó có dạng phẳng, các điểm biên (A,B,C,D) bị chuyển vị một đoạn Δh và dạng hình học cân bằng đầu tiên được tìm thấy bằng phép lặng Newton-Raphson.

Dạng cân bằng nhận được sử dụng lại trong phân tích tiếp theo. Khi đó ta có một dạng khác với sự thay đổi vị trí các điểm biên. Ứng suất trong các phần tử màng được giữ không đổi trong suốt quá trình biến dạng từ lớp phẳng ban đầu tới chiều cao của các điểm biên mong muốn. Kết quả có được theo phương cách trình bày trên ứng với một bước thực hiện trên Matlab cho ở Bảng 1

Bảng 1

Nút	X	Y	Z	Nút	X	Y	Z
1	50.00	00.00	-17.50	10	09.15	00.00	-00.77
2	29.90	04.60	-07.61	11	18.13	00.00	-03.08
3	14.97	14.97	00.00	12	30.16	00.00	-07.79
4	04.60	29.90	07.61	13	09.22	09.22	00.00
5	00.00	50.00	17.50	γ_1	59.45		
6	00.00	30.16	07.80	γ_2	59.72		
7	00.00	18.13	03.08	γ_3	59.72		
8	00.00	09.15	00.77	γ_4	59.45		
9	00.00	00.00	00.00				

5. KẾT LUẬN

♦ Đây là phương pháp khá hiệu quả cho việc xác định biên dạng ban đầu của một kết cấu chịu ứng suất căng đều, đặc biệt là với các kết cấu lớn, phức tạp.

♦ Phương trình cơ bản nhận được như là bài toán cực tiểu hóa và việc áp dụng phương pháp Newton-Raphson cho việc giải hệ phi tuyến

♦ Việc phân tích trên có thể được dùng để kiểm tra các bề mặt cực tiểu.

THE FORM FINDING OF TENSIONED MEMBRANE STRUCTURES

Chu Quoc Thang – Tran Canh Dung

ABSTRACT : In this paper, we will desbribe a method for finding the membrane shape and the edge curve shapes under uniform tension. A surface shape under uniform tension is considered as a soap film stretched in a rigid frame. Its shape is expressed through a non linear differential equation which is approximated to finite difference equations to give numerical solution

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] K.Ishii, Structure design of membrane structure, Tokyo (1969).

[2] O.C. Zienkiewicz, The finite Element method in Engineering Science, Mc Graw-Hill, London (1991).

[3] D. Tran canh, Conception de la structure tendue par la MEF: mémoire de DEA, ENSITM-UDHA, France (1995).

[4] J.H. Argris, Matrix analysis of three dimensional elastic-media small et large displacement, Journal of the Roy, 73, (1969).

[5] J.H. Argris, Matrix method in structural mechanics, Dayto, Ohio (1970).

[6] M.S. Bazaraa, H.D. Sherli, Nonlinear programming, John Wiley, Ohio USA (1965)