VỀ VẤN ĐỀ DAO ĐỘNG MẶT CẦU CONG

Nguyễn Chí Long

Trường Đại Học Sư Phạm TP. Hồ Chí Minh

Lê Khánh Luận

Trường Đại học Kinh tế

(Bài nhận ngày 01/10/1999)

TÓM TẮT: Trong bài báo này, chúng tôi chứng tỏ dao động của mặt cầu cong có thể diễn tả theo các bán nhóm liên tục mạnh trên không gian Hilbert thích hợp.

I. GIỚI THIỆU BÀI TOÁN.

Giả sử chiếc cầu L có chiều dài bằng 1, được đồng nhất với đoạn [0, 1] trên trục hoành và ξ là hằng số biểu thị độ đàn hồi của mặt cầu.

Tại mọi $x \in [0, 1]$, $y(0, x)$ là độ cao ban đầu của mặt cầu tại điểm có hoành độ x. Gọi $y(t, x)$ là độ cao của mặt cầu tại điểm có hoành độ x và thời điểm là t.

Nếu bỏ qua độ lệch nhỏ và chỉ xét dạng dao động của cầu, phương trình dao động của mặt cầu tại thời điểm t và hoành độ x được diễn tả bởi phương trình đạo hàm riêng:

$$(1)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t,x) + 2\xi\dfrac{\partial}{\partial t}y(t,x) + \dfrac{\partial^4}{\partial x^4}(y - y_o)(t,x) = 0 & \text{(i)} \\ y(0,x) = y_o(x) & \text{(ii)} \\ y(t,0) = y(t,1) = 0 & \text{(iii)} \end{cases}$$

Đặt $v(t, x) = e^{2\xi t}\dfrac{\partial y}{\partial t}(t,x) = e^{2\xi t}y_t$ và $u = [\,y \quad v\,]^T \in \Re$

$H = L^2(0, 1)$ $E = \{v \in H^2(0,1) \mid v(0) = v'(0) = 0\}$

$\Re = H \times E$ là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$< u_1, u_2 > = \int_0^1 \left(e^{4\xi t} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + v_1 v_2 \right) dx$$

Đặt $A : D(A) \subset \Re \longrightarrow \Re$

$$u = [y, v]^T \longmapsto Au = \left[-\frac{v}{e^{2\xi t}}, e^{2\xi t} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right]$$

$$\text{với } D(A) = \left\{ [y \quad v]^T \middle| \begin{array}{l} y \in H^2(0,1) \ , \ y(0) = y'(0) = y''(1) = 0 \\ v \in H^2(0,1) \ , \ v(0) = v'(0) = 0 \end{array} \right\}$$

Khi đó bài toán (1) trở thành $\frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0$

Kết quả chứng minh của bài báo là định lý sau :

Định lý *: Bài toán (1) tồn tại duy nhất nghiệm*

$$u(t, x) = T(t)\, u_o(x)$$

Trong đó $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ là một họ C^o – bán nhóm (hay bán nhóm liên tục mạnh) được sinh bởi toán tử A.

Ngoài ra quá trình dao động u(t,x) có thể biểu diễn rõ hơn như sau :

$$u(t, x) = T(t)u_o(x) = \sum_{j=1}^{\infty} 2e^{-\pi^2 j^2 t} \sin \pi j x \int_0^1 \sin \pi j y u_o(y) dy$$

II. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CẦN SỬ DỤNG.

Trong đoạn này chúng tôi sẽ đưa ra một số khái niệm và kết quả cần sử dụng về lý thuyết toán tử trên không gian Hilbert.

Định nghĩa 1 : C^o – bán nhóm các toán tử tuyến tính bị chặn trên không gian Banach X là họ $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subseteq B(X)$ sao cho :

[i] $T(s)\,T(t) = T(s+t)$ với $\forall s, t \geq 0$

[ii] $T(0) = I$, I là toán tử đồng nhất trên X

[iii] Với mỗi $x \in X$, $T(t)x$ liên tục theo t trên $[0, \infty)$.

Định nghĩa 2 : Cho $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subseteq B(X)$ là một C^o – bán nhóm của các toán tử tuyến tính bị chặn trên không gian Banach X và với mỗi $t > 0$, cho $A_t \in B(X)$ được định bởi :

$$A_t = \frac{T(t) - I}{t}$$

Thì họ $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ là sinh vô hạn của toán tử $A : D(A) \subset X \to X$ định bởi

$$Ax = \lim_{t \to 0+} A_t x \quad (x \in D(A))$$

Với $D(A) = \{x \in X \mid A_t x$ có giới hạn (trong X) khi $t \to 0+\}$

Định nghĩa 3 : Cho H là không gian Hilbert, và $A : D(A) \subset H \to H$ là toán tử tuyến tính không bị chặn.

Ta nói : • A là đơn điệu nếu

$$\langle Av , v\rangle \geq 0 \;,\; \forall v \in D(A)$$

• A là đơn điệu cực đại nếu A đơn điệu và

$$\forall f \in H , \exists u \in D(A) \text{ sao cho } u + Au = f$$

Định lý 1 : (Hille – Yosida - Phillips) (Xem [5])

Cho X là không gian Banach. Toán tử $A : D(A) \subset X \to X$ là sinh vô hạn của một C^o – bán nhóm các phép không dãn trên X nếu và chỉ nếu thỏa :

[i] A là toán tử đóng và $D(A)$ là không gian tuyến tính trù mật trong X.

[ii] $\rho(A)$ chứa $\{\lambda \in \mathbb{R}\ ;\ \lambda > 0\}$ và $\|R(\lambda, A)\| \le \dfrac{1}{\lambda}$ với mọi $\lambda > 0$

Định lý 2 : (Xem [4])

Cho H là không gian Hilbert và $A : D(A) \subset H \to H$ là đơn điệu tuyến tính với $\overline{D(A)} = H$. Khi đó nếu $A^* = A$ hay $A^* = -A$ thì A đơn điệu cực đại.

III. CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ CHÍNH.

Gọi $H = L^2(0,1)$ và $E = \{v \in H^2(0,1) \mid v(0) = v'(0) = 0\}$

$\mathfrak{R} = H \times E$ và $u \in \mathfrak{R}$ $\quad u = [y \quad v]^T$ với $v(t, x) = e^{2\xi t}\dfrac{\partial y}{\partial t}(t,x)$ thì $\mathfrak{R}$ là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$< u_1, u_2 > = \int_0^1 \left(e^{4\xi t}.\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + v_1 v_2 \right) dx$$

Xét ánh xạ $A : D(A) \subset \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$

$$u = [y, v]^T \longmapsto Au = \left[-\frac{v}{e^{2\xi t}} \quad , \quad e^{2\xi t}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right]$$

$$\text{với } D(A) = \left\{ [y \quad v]^T \middle| \begin{array}{l} y \in H^2(0,1)\ ,\ y(0) = y'(0) = y''(1) = 0 \\ v \in H^2(0,1)\ ,\ v(0) = v'(0) = 0 \end{array} \right\}$$

thì (i) của (1) trở thành $\dfrac{\partial u}{\partial t} + Au = 0$

Trước tiên ta chứng minh $< Au, u > \ge 0$, $A^* = A$ và $\overline{D(A)} = \mathfrak{R}$.

Dùng công thức tích phân từng phần và sử dụng điều kiện (iii) của (1), ta có :

$$< Au, u > = \int_0^1 \left[e^{4\xi t}\left(\frac{-v''}{e^{2\xi t}}.y'' \right) + e^{2\xi t} y^{(4)} v \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(-e^{2\xi t} v'' y'' + e^{2\xi t} y^{(4)} v\right) dx$$

$$= e^{2\xi t} \int_0^1 (-v'' y'' + y^{(4)} v) dx$$

mà $-\int_0^1 v'' y'' dx = \underbrace{-v' y''}_{0} \Big|_0^1 + \int_0^1 v' y^{(3)} dx = \underbrace{v y^{(3)} \Big|_0^1}_{=0} - \int_0^1 v y^{(4)} dx$.

$$\Rightarrow \int_0^1 v'' v'' dx = \int_0^1 y^{(4)} v dx$$

$$\Rightarrow \langle Au, u \rangle = 0$$

Với $u_1 = [y_1, v_1]^T$, $u_2 = [y_2, v_2]^T$ ta có

$$\langle Au_1, u_2 \rangle = \int_0^1 \left(e^{4\xi t} \frac{-v_1''}{e^{2\xi t}} . y_2'' + e^{2\xi t} y_1^{(4)} v_2 \right) dx$$

$$= e^{2\xi t} \int_0^1 \left(-v_1'' . y_2'' + y_1^{(4)} v_2\right) dx$$

$$= e^{2\xi t} \int_0^1 \left(-v_1 y_2^{(4)} + y_1^{(4)} v_2\right) dx$$

$$< u_1, Au_2 > = \int_0^1 \left(e^{4\xi t} \frac{-v_2''}{e^{2\xi t}} . y_1'' + v_1 e^{2\xi t} y_2^{(4)} \right) dx$$

$$= e^{2\xi t} \int_0^1 \left(-v_2'' y_1'' + v_1 y_2^{(4)}\right) dx$$

$$= e^{2\xi t} \int_0^1 \left(-v_2 y_1^{(4)} + v_1 y_2^{(4)}\right)$$

$\Rightarrow \quad < Au_1, u_2 > \quad = - < u_1, Au_2 >$

$\Rightarrow \quad A = -A^*$

Với A^* là toán tử liên hợp của toán tử A

Đặt $K = \left\{ y \in H^2(0,1) \;\middle|\; y(0) = y'(0) = y''(1) = 0 \right\}$

Ta có $D(A) = K \times E$

Khi đó $\overline{D(A)} = H \times E \quad \Leftrightarrow \quad \overline{K} = H$

Ta có $C_c^\infty(0,1) \subset K \subset H^2(0,1)$

mà $\quad \overline{C_c^\infty(0,1)} = H^2(0,1)$ nên $\overline{K} = H$

Vậy $\quad \overline{D(A)} = \Re$

Như vậy A đơn điệu tuyến tính với $\overline{D(A)} = \Re$ và $A^* = -A$, Định lý 2 cho ta kết luận A đơn điệu cực đại.

Việc thứ hai, ta chứng minh A là toán tử đóng và $\forall \lambda > 0$ thì $(I + \lambda A)$ là ánh xạ 1 – 1 từ $D(A) \to \Re$ có $(I + \lambda A)^{-1}$ là một toán tử liên tục bị chận với chuẩn $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{L(\Re)} \leq 1$. Do A là toán tử đơn điệu cực đại,

$\forall f \in \Re$, $\exists u \in D(A)$ sao cho $u + Au = f$

Ta chứng minh sự tồn tại u là duy nhất. Thật vậy nếu có $\overline{u}$ một lời giải khác thì : $(u - \overline{u}) + A(u - \overline{u}) = 0$

$$\|u - \overline{u}\|^2 \leq \|u - \overline{u}\|^2 + < A(u - \overline{u}), (u - \overline{u}) > = < (u - \overline{u}) + A(u - \overline{u}), u - \overline{u} > = 0$$

Suy ra $\quad u = \overline{u}$

hơn nữa ta có $\|u\|^2 + < Au, u > = < f, u >$

$$\|u\|^2 \le \langle f, u \rangle \le \|f\|.\|u\|$$

nên $\| u \| \le \| f \|$ (3)

Sự duy nhất của u và (3) cho ta kết luận tồn tại toán tử tuyến tính liên tục $(I + A)^{-1} : \Re \longrightarrow D(A)$

$f \longmapsto u$

Do $\dfrac{\|(I+A)^{-1}f\|}{\|f\|} = \dfrac{\|u\|}{\|f\|} \le 1$ nên $\|(I+A)^{-1}\|_{L(\Re)} \le 1$

Dùng tính liên tục của $(I + A)^{-1}$ ta sẽ chứng minh A đóng.

Thật vậy cho dãy $\{u_n\} \subset D(A)$, $u_n \to u$ và $Au_n \to f$

Ta kiểm rằng $u \in D(A)$ và $Au = f$.

Ta có $u_n + Au_n \to u + f$. Do $(I + A)^{-1}$ liên tục nên

$$u_n = (I + A)^{-1}(u_n + Au_n) \to (I + A)^{-1} (u + f)$$

Do đó $u = (I + A)^{-1} (u + f)$ ie $u \in D(A)$ và $u + Au = u + f$

Suy ra $Au = f$

Để chứng minh $(I + \lambda A)^{-1}$ tồn tại và $\|(I+\lambda A)^{-1}\|_{L(\Re)} \le 1$, giả sử $\exists \lambda_o > 0$ có $R(I + \lambda_o A) = \Re$. Ta sẽ chứng minh $\forall \lambda > \dfrac{\lambda_o}{2}$ ta có $R(I + \lambda A) = \Re$.

Trong chứng minh trên : $\forall f \in \Re$, $\exists! u \in D(A)$ thỏa $u + \lambda_o Au = f$ toán tử $(I + \lambda_o A)^{-1} : D(A) \to \Re$ có $\|(I+\lambda_o A)^{-1}\|_{L(\Re)} \le 1$.

Ta tìm lời giải của phương trình : $u + \lambda Au = f$ với $\lambda > \dfrac{\lambda_o}{2}$. (4)

$$(4) \Leftrightarrow \quad u + \lambda_o Au = \frac{\lambda_o}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_o}{\lambda}\right) u$$

$$\Leftrightarrow \quad u = (I + \lambda_o A)^{-1} \left[\frac{\lambda_o}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_o}{\lambda}\right) u\right]$$

$$= (I + \lambda_o A)^{-1} \left(\frac{\lambda_o}{\lambda} f\right) + \left(1 - \frac{\lambda_o}{\lambda}\right) (I + \lambda_o A)^{-1}(u)$$

$$= b + Bu$$

Ta có $\left|1 - \frac{\lambda_o}{\lambda}\right| < 1$ vì $\lambda > \frac{\lambda_o}{2}$

Xét ánh xạ $\widetilde{B} : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$

$$u \longmapsto \widetilde{B}(u) = b + Bu$$

Bởi vì $\left\|\widetilde{B}u - \widetilde{B}v\right\| = \|Bu - Bv\| = \|B(u - v)\| \le \left|1 - \frac{\lambda_o}{\lambda}\right| \left\|(I + \lambda_o A)^{-1}\right\| \|u - v\|$

$$\le c\|u - v\| \quad \text{với} \quad c < 1$$

nên theo định lý điểm bất động của Banach

$$\exists!\, u \in \mathfrak{R} : u = \widetilde{B}(u) = b + Bu$$

Nếu A đơn điệu cực đại thì I + A toàn ánh. Suy ra I + λA toàn ánh với $\lambda > \frac{1}{2}$ và cũng đúng cho $\lambda > \frac{1}{4}$, ... Bằng truy chứng ta có (I + λA) toàn ánh, với mọi $\lambda > 0$. Như vậy (I + λA) là ánh xạ 1 – 1 từ D(A) $\to \mathfrak{R}$ do đó tồn tại $(I + \lambda A)^{-1} : \mathfrak{R} \longrightarrow D(A)$

$$f \longmapsto (I + \lambda A)^{-1}(f) = u$$

$$\|u\|^2 + \lambda < Au, u > = \|u\|^2 + < \lambda Au, u > = < u + \lambda A, u > = < f, u >$$

$$\|u\|^2 \le \langle f, u \rangle \le \|f\|.\|u\| \Rightarrow \|u\| \le \|f\| \quad (5)$$

Bất đẳng thức (5) cho ta kết luận $(I + \lambda A)^{-1}$ liên tục

$$\frac{\|(I+\lambda A)^{-1} f\|}{\|f\|} = \frac{\|u\|}{\|f\|} \le 1 \Rightarrow \|(I+\lambda A)^{-1}\|_{L(\mathfrak{R})} \le 1$$

Ta có :

$$\|(I+\lambda A)^{-1}\|_{L(\mathfrak{R})} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \|(\lambda I + A)^{-1}\| \le \frac{1}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \quad \|(\lambda I - (-A))^{-1}\| \le \frac{1}{\lambda} \quad (6)$$

Do A đóng, $\overline{D(A)} = \mathfrak{R}$ và bất đẳng thức (6) thỏa giả thiết của Định lý 1 (Hille - Yosida - Phillips) nên $-A$ là sinh vô hạn của một C^o – bán nhóm $\{T(t)\}_{t \ge 0} \subset B(\mathfrak{R})$. Lấy $u(t, x) = T(t)u_o(x)$.

Việc cuối cùng, ta chứng minh $u(t, x) = T(t)u_o(x)$ là nghiệm duy nhất của bài toán (1). Thật vậy : cố định x, để đơn giản ta viết $u(t) = u(t, x)$ $u(0) = u_o(x)$

Thay vào phương trình (2) ta được

$$\dot{u}(t) + Au(t) = 0$$

$$u(0) = u_o \quad (7)$$

(Trong đó $\dot{u}(t) = \dfrac{du}{dt}$)

Rõ ràng, $u(t) = T(t)u_o$ là một lời giải của (7).

Nếu $x \in D(A)$ thì $T(t)x \in D(A)$ với $0 \le t \le \infty$ và $AT(t)x = T(t)Ax$

hơn nữa ; $\dfrac{d}{dt}T(t)x = -AT(t)x = -T(t)Ax$

Thật vậy với $A_h = \dfrac{T(h) - I}{h}$, nếu $x \in D(A)$ thì từ $T(t)A_h x = A_h T(t)x$ ta được $\lim\limits_{h\to 0} A_h T(t)x = \lim\limits_{h\to 0} T(t)A_h x = T(t)(\lim\limits_{h\to 0} A_h x) = -T(t)Ax$

Vậy $T(t)x \in D(A)$ và $AT(t)x = T(t)Ax$. Hơn nữa, nếu $t > 0$, $h > 0$ thì $\lim\limits_{h\to 0}\{\dfrac{T(t)x - T(t-h)x}{h} + T(t)Ax\} = \lim\limits_{h\to 0} T(t-h)(A_h x + Ax) - \lim\limits_{h\to 0}[T(t-h) - T(t)]Ax = 0$ kiểm dễ và $\lim\limits_{h\to 0}\left\{\dfrac{T(t+h)x - T(t)x}{h} + T(t)Ax\right\} = \lim\limits_{h\to 0} T(t)[A_h x + Ax] = 0$ hai kết quả trên cho ta $\dfrac{d}{dt}T(t)x$ tồn tại và bằng $-T(t)Ax$, nghĩa là

$$\frac{d}{dt}T(t)x = -T(t)Ax \qquad (8)$$

Để chứng minh sự duy nhất của lời giải, ta chứng minh rằng nếu có một lời giải $y(t)$ của (8) thỏa : $\dot{y}(t) + Ay(t) = 0$

$$y(0) = 0$$

thì $\quad y \equiv 0$

Thật vậy, với mỗi $t > 0$ cho : $z(s) = T(t-s)\,y(s)$, $0 \le s \le t$

thì $z(s)$ liên tục tuyệt đối và

$$z(t) - z(h) = \int_h^t \frac{d}{ds} z(s)ds, \quad 0 < h < t$$

Vì $\quad \dfrac{d}{ds}z(s) = \dfrac{d}{ds}[T(t-s)y(s)]$

$$= -T'(t-s)\,y(s) + T(t-s)\,\dot{y}(s)$$

$$= T(t-s)\,Ay(s) + T(t-s)\,\dot{y}(s) \text{ do } (8)$$

$$= T(t-s)\,[Ay(s) + y\ (s)] = 0$$

nên $z(t) = z(h)$

$$-T'(t-s)\,y(s) = T(t-s)\,Ay(s)$$

$$-Ay(s) = \lim_{h\to 0}\frac{T(h)y(s) - y(s)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[T(h) - T(0)]}{h}y(s)$$

$$T'(t-s) = \lim_{h\to 0}\frac{[T(t-s+h) - T(t-s)]}{h}$$

Do đó $z(t) = y(t) = z(h) = T(t-h)\,y(h)$

cho $h \to 0$, vì $y(h) \to 0$, ta có : $z(t) = y(t) = 0$ với mỗi $t > 0$

Vậy $z \equiv 0$.

Ngoài ra ta có thể chứng minh rằng các giá trị riêng của toán tử A là $\lambda_n = \pi^2 n^2$, n = 1, 2, ... và cơ sở trực chuẩn gồm các vectơ riêng tương ứng trong không gian Hilbert H là

$$e_n(x) = \sqrt{2}\,\sin \pi n x\ ,\quad 0 \le x \le 1\ ,\quad n = 1, 2, \dots$$

Do đó, xem [4], u(t, x) được biểu diễn

$$u(t, x) = T(t)u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} 2e^{-\pi^2 j^2 t}\sin \pi j x \int_0^1 \sin \pi j y . u_0(y)dy\ .$$

THE SEMIGROUP CHARACTERIZATION OF THE VIBRATION OF THE CURVED SURFACE OF A BRIDGE

Nguyen Chi Long - Le Khanh Luan

ABSTRACT : In this paper, we show that the vibration of the curved surface of a bridge can be described in terms of a strongly continuous semigroup on an appropriate Hilbert space.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] **E-Hille & R-S-Phillips:** Functional Analysis and Semigroups, American Mathematical Society colloquium Publications, Providence, 1957.

[2] **Haim Brezis:** Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications. Masson Paris Milan Barcelone 1983.

[3] **Krabs** and **Nguyễn Chí Long:** On the controllability of a Robot Arm. Mathematical Methods In the Applied Sciences vol 21 p: 25 – 42, 1998 (Teubner Stuttgart - John Willy & Sons).

[4] **Nguyễn Chí Long**: Application of Functional Analysis to Optimal Control problem. Especially: The Control of a Robot Arm. Dissertation, D17 Darmstadt 1996.

[5] **A .C. Mcbride:** Semigroups of linear perators: an introduction, Longman Scientific & Technical, Copublished in the United States with John Wiley & Sons, inc ... New York, 1987.