

ỨNG DỤNG PHẦN TỬ TỨ GIÁC TRONG TÍNH TOÁN KẾT CẤU VẬT LIỆU COMPOSITE

PHAN ĐÌNH HUẤN

Trường Đại Học Kỹ Thuật
(Nhận được ngày 13/03/1998)

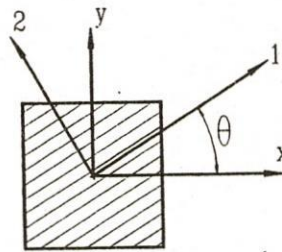
Tóm tắt:

Phương pháp phần tử hữu hạn tỏ ra là một công cụ hữu hiệu để giải các bài toán có hình dáng hình học hoặc điều kiện biên phức tạp. Trong bài này, phần tử tứ giác composite sợi nền polyme được thiết lập cho trường hợp ngoại lực nằm trong mặt phẳng tấm. Phần tử này được đưa vào một chương trình để tính các tấm composite nền polyme sợi đơn hướng.

Kết quả tính được kiểm chứng với kết quả cho bởi phương pháp giải tích.

1. Lý thuyết composite

1.1 Composite một lớp



Hình 1

Trường hợp vật liệu composite sợi đơn hướng, ở trạng thái ứng suất phẳng, quan hệ ứng suất – biến dạng trong hệ tọa độ vật liệu 1-2:

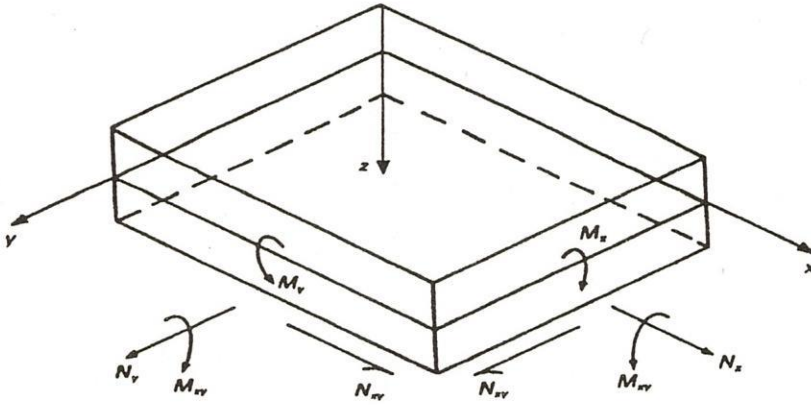
$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Trong hệ tọa độ x-y bất kỳ, [Q] được thay bởi [Q']:

$$[Q'] = [T].[Q].[T]^T \quad (2)$$

Ma trận [Q] và [T] được trình bày ở phần phụ lục.

1.2 composite-nhiều lớp



Hình 2

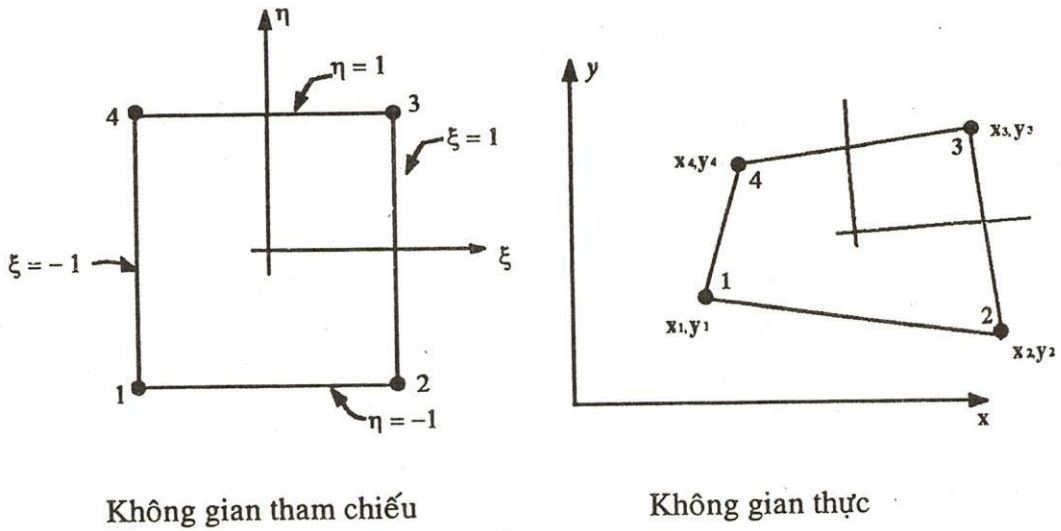
Dựa trên giả thuyết Kirchhoff, quan hệ giữa lực và biến dạng được biểu diễn dưới dạng:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & C_{16} & C_{26} & C_{66} \\ C_{11} & C_{12} & C_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \\
 C_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\
 D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)
 \end{aligned} \quad (4)$$

2. Mô hình phần tử hữu hạn

Xét phần tử tứ giác bốn nút dựa trên cơ sở chuyển vị:



Hình 3

Với mô hình chuyển vị tuyến tính, các hàm dạng trong không gian tham chiếu:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}, & N_2 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}, \\ N_3 &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}, & N_4 &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \end{aligned} \quad (5)$$

Thế năng toàn phần đạt giá trị dừng khi:

$$\delta \Pi_p = \left\{ \delta u^e \right\}^T \left(\int_{V^e} [B]^T [D] [B] dV \right) \left\{ u^e \right\} - \left\{ \delta u^e \right\}^T \left(\int_{V^e} [N]^T \{F\} dV + \int_{S^e} [N]^T \{T\} dS \right) = 0 \quad (6)$$

$\{F\}$: lực thể tích, $\{T\}$: lực bề mặt

Đặt $[K^e] = \int_{V^e} [B]^T [D] [B] dV$, $\{f^e\} = \int_{V^e} [N]^T \{F\} dV + \int_{S^e} [N]^T \{T\} dS$, ta có:

$$[K^e] \cdot \{u^e\} = \{f^e\} \quad (7)$$

$[K]$: ma trận độ cứng phần tử, $\{f^e\}$: vectơ lực nút phần tử:

$[D]$: ma trận độ cứng vật liệu

$[B]$: ma trận trong quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị nút:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\delta^e\} \quad (8)$$

Chuyển vị nút : $\{\delta^e\} = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4]^T$

Biểu thức ma trận [B]:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Trong đó:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} [x_i \ y_i] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (10)$$

[J]: ma trận Jacôbi

Quan hệ của ma trận độ cứng phần tử trong không gian thực và trong không gian tham chiếu được thể hiện qua biểu thức:

$$[K^e] = \int_{V^e} [B]^T [D] [B] t \, dx \, dy = \iint_{V^r} [B(\xi, \eta)]^T [D] [B(\xi, \eta)] t \det[J] \, d\xi \, d\eta \quad (11)$$

Tích phân (9) được tính bằng phương pháp tích phân số Gauss:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B(\xi, \eta)]^T [D] [B(\xi, \eta)] t \det[J] \, d\xi \, d\eta = \sum_{i=1}^4 [B_i(\xi, \eta)]^T [D] [B_i(\xi, \eta)] t \det[J_i] \quad (12)$$

Các ma trận [J], $[J]^{-1}$, [B] và $\det[J]$ được trình bày ở phần phụ lục.

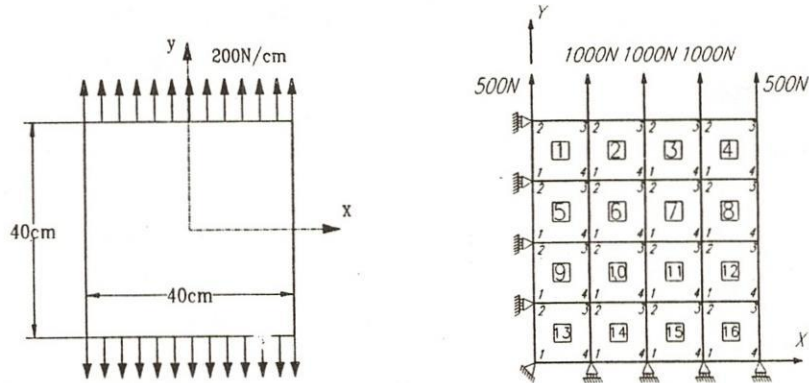
Thí dụ số

Thí dụ 1

Tính ứng suất và biến dạng cho tấm composite đơn hướng, một lớp, bề dày $t=0,1\text{cm}$, có phương sợi $\theta = 30^\circ$ và cơ tính như sau:

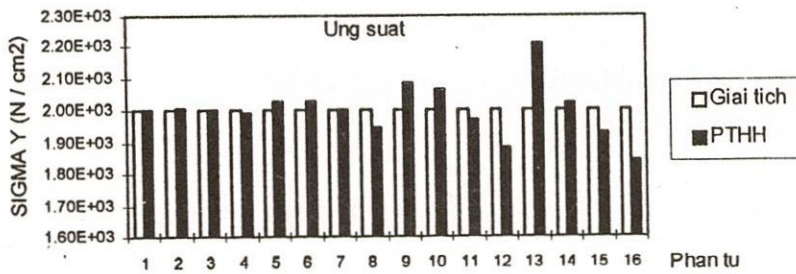
$$E_{11} = 40\text{GPa}; E_{22} = 10\text{GPa}; \nu_{12} = 0,32; G_{12} = 4,5\text{GPa}$$

Kích thước tấm, lực tác dụng và mô hình tính phần tử hữu hạn thể hiện ở hình 3

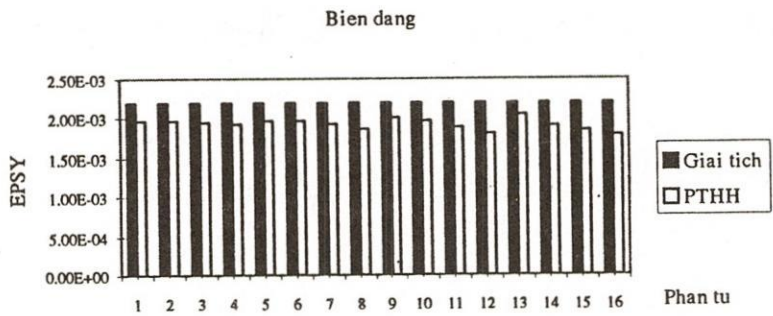


Hình 4

Kết quả: hình 5 thể hiện ứng suất σ_y tính được bằng phương pháp phần tử hữu hạn so với lời giải giải tích, hình 6 thể hiện biến dạng ϵ_y tính được bằng phương pháp phần tử hữu hạn so với lời giải giải tích



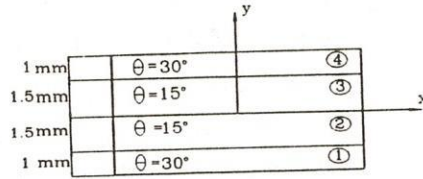
Hình 5



Hình 6

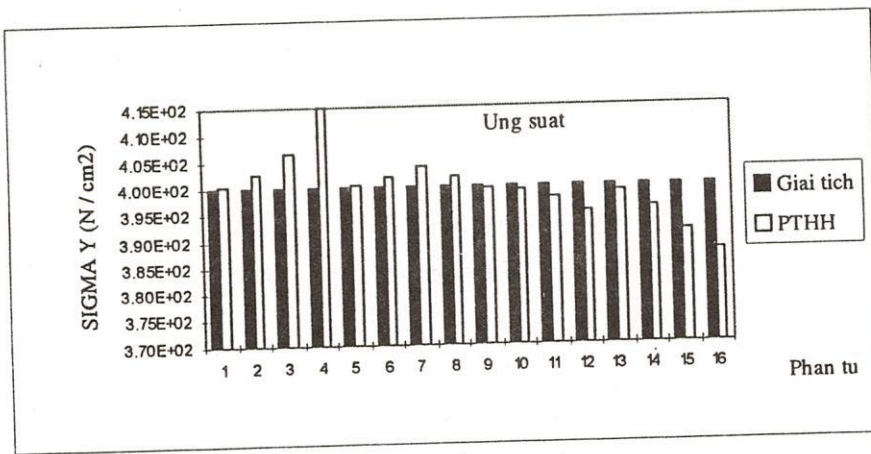
Thí dụ 2

Các số liệu và mô hình tính giống ở thí dụ 1, chỉ khác về cấu hình vật liệu và bề dày tấm $t=0,5$ cm.

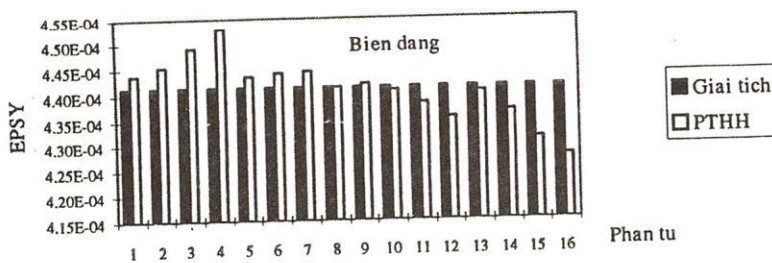


Hình 7

Kết quả: hình 8 thể hiện ứng suất σ_y tính được bằng phương pháp phần tử hữu hạn so với lời giải giải tích, hình 9 thể hiện biến dạng ϵ_y tính được bằng phương pháp phần tử hữu hạn so với lời giải giải tích



Hình 8



Hình 9

3. Nhận xét và kết luận

Sai lệch giữa các kết quả cho bởi phương pháp phần tử hữu hạn so với lời giải giải tích thể hiện ở bảng sau:

| Bài toán | Sai số cục bộ σ_y lớn nhất | Sai số σ_y trung bình | Sai số cục bộ ϵ_y lớn nhất | Sai số ϵ_y trung bình |
|-----------|-----------------------------------|------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------|
| Một lớp | 10,5 % | 0 % | 19,1 % | 12,7 % |
| Nhiều lớp | 3,75 % | 0.03 % | 2,7 % | 0 % |

Trong cả hai trường hợp, giá trị biến dạng cho bởi phương pháp phần tử hữu hạn nhỏ hơn giá trị biến dạng cho bởi phương pháp giải tích. Điều này hợp lý bởi vì khi kết cấu liên tục được thay bởi các phần tử thì kết cấu rời rạc có độ cứng lớn hơn. Ngoài ra, sai số của các giá trị ứng suất trung bình, biến dạng trung bình không đáng kể.

Như vậy, kết quả tính các kết cấu composite trong trường hợp tải phẳng cho bởi phần tử tứ giác bốn nút được thiết lập trong bài này là đáng tin cậy.

PHỤ LỤC

• MA TRẬN [Q]

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} & \frac{\nu_{12} \cdot E_{22}}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12} \cdot E_{22}}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} & \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (13)$$

E_{11} : môđun đàn hồi dọc; E_{22} : môđun đàn hồi ngang; ν_{12} : hệ số Poisson chính
 ν_{21} : hệ số Poisson phụ; G_{12} : môđun đàn hồi trượt

• MATRẬN [T]

Đặt $m = \cos\theta, n = \sin\theta$:

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

• MATRẬN [J]

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-1+\eta)x_1 + (1-\eta)x_2 + (1+\eta)x_3 + (-1-\eta)x_4 & (-1+\eta)y_1 + (1-\eta)y_2 + (1+\eta)y_3 + (-1-\eta)y_4 \\ (-1+\xi)x_1 + (-1-\xi)x_2 + (1+\xi)x_3 + (1-\xi)x_4 & (-1+\xi)y_1 + (-1-\xi)y_2 + (1+\xi)y_3 + (1-\xi)y_4 \end{bmatrix} \quad (15)$$

• MATRẬN [J]⁻¹

$$[J]^{-1} = \frac{2}{\kappa} \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} \quad (16)$$

với

$$\begin{aligned} j_{11} &= y_1 - y_1 \xi + y_2 + y_2 \xi - y_3 - y_3 \xi - y_4 + y_4 \xi \\ j_{12} &= -y_1 + y_1 \eta + y_2 - y_2 \eta + y_3 + y_3 \eta - y_4 - y_4 \eta \\ j_{21} &= -x_1 + x_1 \xi - x_2 - x_2 \xi + x_3 + x_3 \xi + x_4 - x_4 \xi \\ j_{22} &= x_1 - x_1 \eta - x_2 + x_2 \eta - x_3 - x_3 \eta + x_4 + x_4 \eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa = & -x_1 y_4 \xi + x_2 y_4 \xi - x_1 y_3 \eta + x_1 y_3 \xi - x_4 y_2 \eta + x_1 y_2 \eta - x_2 y_3 \xi - x_1 y_2 + x_1 y_4 + x_2 y_1 \\ & - x_2 y_3 + x_3 y_2 - x_3 y_4 - x_4 y_1 + x_4 y_3 - x_2 y_1 \eta + x_2 y_4 \eta - x_3 y_1 \xi + x_3 y_2 \xi + x_3 y_1 \eta - x_3 y_4 \eta \\ & + x_4 y_1 \xi - x_4 y_2 \eta + x_4 y_3 \eta \end{aligned}$$

• **MA TRẬN [B]**

$$[B] = \frac{1}{2\kappa_1} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} & 0 & b_{15} & 0 & b_{17} & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} & 0 & b_{28} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} & b_{37} & b_{38} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \kappa_1 = & x_3 \eta y_4 + x_1 \eta y_3 + x_2 y_3 \xi - x_2 y_4 \xi + x_2 y_1 \eta - x_2 y_4 \eta + x_3 y_1 \xi - x_3 y_2 \xi - x_3 \eta y_1 \\ & - x_4 y_1 \xi + x_4 y_2 \xi + x_4 y_2 \eta - x_4 y_3 \eta - x_1 \eta y_2 - x_1 y_3 \xi + x_1 y_4 \xi + x_1 y_2 - x_1 y_4 - x_2 y_1 \\ & + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_4 + x_4 y_1 - x_4 y_3 \end{aligned}$$

$$\kappa_2 = y_1 - y_1 \eta - y_2 + y_2 \eta - y_3 - y_3 \eta + y_4 + y_4 \eta$$

$$\kappa_3 = y_1 - y_1 \xi - y_2 + y_2 \xi - y_3 - y_3 \xi + y_4 + y_4 \xi$$

$$\kappa_4 = x_1 - x_1 \eta - x_2 + x_2 \eta - x_3 - x_3 \eta + x_4 + x_4 \eta$$

$$\kappa_5 = x_1 - x_1 \xi + x_2 + x_2 \xi - x_3 - x_3 \xi - x_4 + x_4 \xi$$

$$b_{11} = \kappa_3 (1 - \eta) + \kappa_2 (-1 + \xi)$$

$$b_{13} = \kappa_3 (-1 + \eta) + \kappa_2 (-1 - \xi)$$

$$b_{15} = \kappa_3 (-1 - \eta) + \kappa_2 (1 + \xi)$$

$$b_{17} = \kappa_3 (1 + \eta) + \kappa_2 (1 - \xi)$$

$$b_{22} = \kappa_5 (-1 + \eta) + \kappa_4 (1 - \xi)$$

$$b_{24} = \kappa_5 (1 - \eta) + \kappa_4 (1 + \xi)$$

$$b_{26} = \kappa_5 (1 + \eta) + \kappa_4 (-1 - \xi)$$

$$b_{28} = \kappa_5 (-1 - \eta) + \kappa_4 (-1 + \xi)$$

$$b_{31} = \kappa_5 (-1 + \eta) + \kappa_4 (1 - \xi)$$

$$b_{32} = \kappa_3 (1 - \eta) + \kappa_2 (-1 + \xi)$$

$$b_{33} = \kappa_5 (1 - \eta) + \kappa_4 (1 + \xi)$$

$$b_{34} = \kappa_3 (-1 + \eta) + \kappa_2 (-1 - \xi)$$

$$b_{35} = \kappa_5 (1 + \eta) + \kappa_4 (-1 - \xi)$$

$$b_{36} = \kappa_3 (-1 - \eta) + \kappa_2 (1 + \xi)$$

$$b_{37} = \kappa_5 (-1 - \eta) + \kappa_4 (-1 + \xi)$$

$$b_{38} = \kappa_3 (1 + \eta) + \kappa_2 (1 - \xi)$$

A FOUR-NODE QUADRILATERAL FINITE ELEMENT FOR COMPOSITE STRUCTURE DESIGN

Phan Đình Huấn

Abstract:

The Finite Element Method is a powerful tool in solving the complicated geometry or boundary condition problems. In this paper, a composite four-node quadrilateral element is presented in case of in-plane loads. This element is used in a program to calculate the unidirectional fibre reinforced polymer plates.

The results agree well with analytical ones.

Tài liệu tham khảo

- [1] ALI MOHAMED, *Calcul statique et dynamique par éléments finis sur micro-ordinateurs de structures composites et métalliques*, Thèse doctorale, L'Université Paris 6, 1986.
- [2] GEORGE R. BUCHANAN, *Finite Element Analysis*, Mc Graw Hill.
- [3] GOURI DHATT & GILBERT TOUZOT, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine S.A. éditeur, 1984.
- [4] JAROSLAV MACKERLE, *Finite Element and Boundary Element Library For Composites - A Bibliography (1991-1993)*, *Finite Element in Analysis and Design*, 17, pp. 155-165, Elsevier, 1994.
- [5] J.M. BERTHELOT, *Matériaux Composites*, Edition Masson, 1992.
- [6] O.O.OCHOA and J.N. REDDY, *Finite Element Analysis of Composite Laminates*, Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [7] PHAN DINH HUAN, *Calcul et prédimensionnement des structures composites et sandwiches*, Rapport de stage, Laboratoire Mécanique et Matériaux, Université Claude Bernard Lyon I, 1995.
- [8] PHAN ĐÌNH HUẤN, *Tính toán thiết kế các kết cấu composite bằng phương pháp phần tử hữu hạn*, Tuyển Tập Công Trình Khoa Học Hội Nghị Cơ Học Toàn Quốc Lần Thứ Sáu, pp. 141-146, 1997.
- [9] S.S. RAO, *The Finite Element Method in Engineering*, Pergamon Press, 1988.
- [10] STEPHEN W. TSAI, *Composite Design*, Think Composites, 1988
- [11] S. LAROZE & J. J. BARRAU, *Calcul des structures en matériaux composites*, Mécanique des structures, Tome 4, Masson.
- [12] TRẦN ÍCH THỊNH, *Vật liệu composit - Cơ học và tính kết cấu*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1994.