CHỈNH HÓA MỘT BÀI TOÁN NGƯỢC THỜI GIAN CHO PHƯƠNG TRÌNH NHIỆT

Nguyễn Cam
Khoa Toán Trường Đại Học Sư Phạm
Phạm Hoàng Quân
Trường PTTH Bùi Thị Xuân - Thành Phố Hồ Chí Minh
(Nhận được ngày 06/03/1998)

Tóm tắt:

Chúng tôi khảo sát một bài toán ngược thời gian cho phương trình nhiệt. Bài toán được quy về việc khảo sát một phương trình tích phân loại tích chập và được chỉnh hóa bằng phương pháp Tikhonov với các đánh giá sai số.

I. Mở đầu

Bài toán ngược thời gian cho phương trình nhiệt nhằm xác định phân bố nhiệt độ tại thời điểm ban đầu $t = 0$ từ phân bố nhiệt độ đo được tại thời điểm sau đó, chẳng hạn tại $t = 1$. Bài toán này còn có thể coi như một bài toán điều khiển: bài toán điều khiển phân bố nhiệt độ ban đầu ($t = 0$) để có thể nhận được phân bố nhiệt độ như ý muốn tại thời điểm $t = 1$. Đây là một bài toán không chỉnh theo nghĩa là nó không luôn luôn tồn tại nghiệm và ngay cả khi nghiệm của bài toán tồn tại thì nó lại không phụ thuộc liên tục theo dữ kiện. Bài toán này được rất nhiều nhà toán học quan tâm khảo sát. Chúng ta có thể tham khảo [1], trong đó ngoài các tài liệu trích dẫn phong phú, tác giả còn cho ta một cái nhìn tổng quan về các phương pháp khảo sát cũng như chỉ ra những vấn đề còn bỏ ngỏ của bài toán ngược thời gian cho phương trình nhiệt. Cụ thể, trong [2], các tác giả đưa ra nghiệm chỉnh hóa như là tổ hợp tuyến tính một số hữu hạn các hàm riêng của toán tử $-\Delta$ và trong [3], tác giả chỉnh hóa bài toán trong trường hợp tổng quát như là một phương trình vi phân trong không gian Hibert trừu tượng. Để ý rằng miền phân bố nhiệt khảo sát trong [2] và [3] là các miền bị chận.

Trong bài báo này, chúng tôi khảo sát bài toán ngược thời gian cho phương trình nhiệt trên cả mặt phẳng $\mathbb{R}^2$. Bài toán sẽ được chuyển về một phương trình tích phân loại tích chập và được chỉnh hóa bằng phương pháp Tikhonov cũng như đưa ra đánh giá sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác. Cụ thể chúng tôi chứng minh rằng nếu sai số giữa dữ kiện chính xác và dữ kiện nhận được do đo đạc là ε thì sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm chỉnh hoá có bậc là $\dfrac{1}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}$ khi $\varepsilon \to 0$.

II. Phương trình tích phân và chỉnh hóa

Xét phương trình nhiệt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,1) \tag{1}$$

với các điều kiện

$$\begin{aligned} u(x,y,0) &= v(x,y) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,y,1) &= g(x,y) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Bài toán ngược thời gian cho phương trình nhiệt được khảo sát là nhằm xác định ẩn hàm v sao cho hệ thống (1-2) có một nghiệm u với g là dữ kiện cho trước.

Bằng công cụ hàm Green, với x, y $\in \mathbb{R}^2$, $0 < t < 1$, ta có:

$$u(x,y,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\xi,\eta)}{t} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4} \right) d\xi d\eta \tag{3}$$

Cho $t \to 1$ trong (3), ta nhận được

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v(\xi,\eta) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4} \right) d\xi d\eta = g(x,y) \tag{4}$$

Đây là một phương trình tích phân loại tích chập theo $v(\xi,\eta)$ và cũng là một bài toán không chỉnh. Để chỉnh hóa, chúng tôi xây dựng một dãy các nghiệm xấp xỉ ổn định $(v_\beta)_\beta > 0$ và trích ra một nghiệm đủ gần nghiệm chính xác của hệ thống (1-2).

Trước hết, đặt:

$$K(x,y) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4} \right)$$

Ta có, với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} K \star v(x,y) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v(\xi,\eta) K(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v(\xi,\eta) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4} \right) d\xi d\eta \end{aligned}$$

và (4) được viết lại thành

$$K \star v(x,y) = g(x,y) \tag{5}$$

Gọi v_0 là nghiệm "chính xác" cần tìm của (5) ứng với dữ kiện chính xác g_0 ở vế phải và gọi g là dữ kiện bị nhiễu nhận được do đo đạc, ta được kết quả sau:

Định lý 1:

Giả sử $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ và $|g - g_0|_2 < \varepsilon$ với $|.|_2$ là chuẩn L^2. Tồn tại nghiệm xấp xỉ ổn định v_ε của (5) sao cho

$$|v - v_0|_2 \le \frac{C}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

với C là một hằng số thỏa:

$$C \geq 4\sqrt{2}\max\left\{\sqrt{|\hat{v}_0|_2^2+1}, 1+|\lambda\hat{v}_0|_2\right\}$$

trong đó $\lambda(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Chứng minh:

Ta có:

$$\begin{aligned}K(\omega,\varpi) &\equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K(x,y)e^{-i(x\omega+y\varpi)}dxdy\\ &= e^{-(\omega^2+\varpi^2)}\end{aligned}$$

và lấy biến đổi Fourier hai vế của (5), ta nhận được đẳng thức

$$\hat{K}(\omega,\varpi).\hat{v}_0(\omega,\varpi)=\hat{g}_0(\omega,\varpi) \tag{6}$$

Với mỗi $\beta>0$, hàm số

$$\psi(\omega,\varpi)=\frac{\hat{\psi}(\omega,\varpi)}{\beta+\hat{K}^2(\omega,\varpi)}.\hat{g}(\omega,\varpi) \tag{7}$$

thuộc $L^2(\mathbb{R}^2)$ và do đó hàm số

$$v_\beta(x,y)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\omega,\varpi).e^{i(\omega x,\varpi y)}d\omega d\varpi$$

cũng thuộc $L^2(\mathbb{R}^2)$ do (7), v_β thỏa đẳng thức

$$\beta\hat{v}_\beta(\omega,\varpi)+\hat{K}^2(\omega,\varpi).\hat{v}_\beta(\omega,\varpi)=\hat{K}(\omega,\varpi)\hat{g}(\omega,\varpi) \tag{8}$$

Từ (6) và (8) ta nhận được

$$\begin{aligned}&\beta\left(\hat{v}_\beta(\omega,\varpi)-\hat{v}_0(\omega,\varpi)\right)+\hat{K}^2(\omega,\varpi).\left(\hat{v}_\beta(\omega,\varpi)-\hat{v}_0(\omega,\varpi)\right)=\\ &\quad=-\beta\hat{v}_0(\omega,\varpi)+\hat{K}(\omega,\varpi)\left(\hat{g}(\omega,\varpi)-\hat{g}_0(\omega,\varpi)\right)\end{aligned} \tag{9}$$

Nhân hai vế của (9) cho lượng liên hiệp của $\hat{v}_\beta(\omega,\varpi)-\hat{v}_0(\omega,\varpi)$ rồi lấy tích phân trên $\mathbb{R}^2$, ta được

$$\begin{aligned}\beta|v_\beta-v_0|_2^2+|K(v_\beta-v_0)|_2^2 &= -\beta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}v_0(\omega,\varpi)\overline{\left(v_\beta(\omega,\varpi)-v_0(\omega,\varpi)\right)}d\omega d\varpi+\\ &+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K(\omega,\varpi)\left(g(\omega,\varpi)-g_0(\omega,\varpi)\right)\overline{\left(v_\beta(\omega,\varpi)-v_0(\omega,\varpi)\right)}d\omega d\varpi\end{aligned}$$

Suy ra

$$\beta|v_\beta-v_0|_2^2+|K(v_\beta-v_0)|_2^2\leq\beta|v_0|_2|v_\beta-v_0|_2+|g-g_0|_2|K(v_\beta-v_0)|_2$$

Chọn $\beta = 1$ (vói $\varepsilon < 1$) và lưu ý rằng $|g - g_0|_2 = |g - g_0|_2 < \varepsilon$, ta có

$$\varepsilon|v_\varepsilon - v_0|_2^2 + |K(v_\varepsilon - v_0)|_2^2 \le \varepsilon|v_0|_2|v_\varepsilon - v_0|_2 + \varepsilon|K(v_\varepsilon - v_0)|_2$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2}|v_0|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}|v_\varepsilon - v_0|_2^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{1}{2}|K(v_\varepsilon - v_0)|_2^2$$

Do đó

$$\varepsilon|\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0|_2^2 + |\hat{K}(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0)|_2^2 \le \varepsilon(|\hat{v}_0|_2^2 + 1) \tag{10}$$

Đặc biệt ta có:

$$|\hat{K}(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0)|_2^2 \le \varepsilon(|\hat{v}_0|_2^2 + 1) \tag{11}$$

Với $\beta = \varepsilon$, đẳng thức (9) trở thành

$$\varepsilon(\hat{v}_\varepsilon(\omega,\varpi) - \hat{v}_0(\omega,\varpi)) + \hat{K}^2(\omega,\varpi).(\hat{v}_\varepsilon(\omega,\varpi) - \hat{v}_0(\omega,\varpi)) =$$
$$= -\varepsilon\hat{v}_0(\omega,\varpi) + \hat{K}(\omega,\varpi)(\hat{g}(\omega,\varpi) - \hat{g}_0(\omega,\varpi))$$

Nhân hai vế của đăng thức trên cho $\lambda^2(\omega,\varpi)\overline{(\hat{v}_\varepsilon(\omega,\varpi) - \hat{v}_0(\omega,\varpi))}$ rồi lấy tích phân trên IR^2, ta nhận được

$$\varepsilon|\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0|_2^2 + |\lambda\hat{K}(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0)|_2^2 = -\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2(\omega,\varpi)\hat{v}_0(\omega,\varpi)\overline{(\hat{v}_\beta(\omega,\varpi) - \hat{v}_0(\omega,\varpi))}d\omega d\varpi +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2(\omega,\varpi)\hat{K}(\omega,\varpi)(\hat{g}(\omega,\varpi) - \hat{g}_0(\omega,\varpi))\overline{(\hat{v}_\beta(\omega,\varpi) - \hat{v}_0(\omega,\varpi))}d\omega d\varpi$$

Suy ra

$$\varepsilon|\lambda(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0)|_2^2 + |\lambda\hat{K}(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0)|_2^2 \le \varepsilon|\lambda\hat{v}_0|_2|\lambda(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0)|_2 + |\lambda\hat{K}|_\infty|\hat{g} - \hat{g}_0|_2|\lambda(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0)|_2$$

trong đó

$$|\lambda\hat{K}|_\infty = \sup_{(\omega,\varpi)\in IR^2}|\lambda(\omega,\varpi)\hat{K}(\omega,\varpi)| = \sup_{(\omega,\varpi)\in IR^2}\sqrt{\omega^2 + \varpi^2}\,e^{-(\omega^2+\varpi^2)} = \sqrt{\frac{1}{2e}}$$

Từ đó suy ra

$$\varepsilon|\lambda(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0)|_2^2 \le \varepsilon|\lambda(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0)|_2(|\lambda\hat{v}_0|_2 + 1)$$

và ta nhận bất đẳng thức

$$|\lambda(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0)|_2^2 \le |\lambda\hat{v}_0|_2 + 1 \tag{12}$$

Đặt $B = \max\left(\sqrt{|\hat{v}_0|_2^2 + 1}, |\lambda\hat{v}_0|_2 + 1\right)$, từ (11) và (12), ta nhận được các bất đẳng thức

$$|\hat{K}(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0)|_2^2 \le B^2\varepsilon \tag{13}$$

$$\left|\lambda(\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0)\right|_2^2 \le B^2 \tag{14}$$

Ngoài ra ta có

$$|v_\varepsilon - v_0|_2^2 = |\hat{v}_\varepsilon - \hat{v}_0|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{v}_\varepsilon(\omega,\varpi) - \hat{v}_0(\omega,\varpi)|^2 d\omega d\varpi$$

Với mỗi $a_\varepsilon > 0$, đặt

$$D = \{(\omega,\varpi) | \omega^2 + \varpi^2 \le a_\varepsilon\}$$

Vì $\hat{K}(\omega,\varpi) \ge e^{-a_\varepsilon}$ với mọi $(\omega,\varpi) \in D$ nên ta có

$$\int_D |\hat{v}_\varepsilon(\omega,\varpi) - \hat{v}_0(\omega,\varpi)|^2 d\omega d\varpi \le e^{2a_\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{K}(\omega,\varpi)(\hat{v}_\varepsilon(\omega,\varpi)\hat{v}_0(\omega,\varpi))\right|^2 d\omega d\varpi$$

Suy ra

$$\int_D |\hat{v}_\varepsilon(\omega,\varpi) - \hat{v}_0(\omega,\varpi)|^2 d\omega d\varpi \le e^{2a_\varepsilon}.B^2.\varepsilon \tag{15}$$

Ngoài ra, với $(\omega,\varpi) \notin D$ thì $\lambda(\omega,\varpi) = (\omega^2 + \varpi^2)^{\frac{1}{2}} \ge a_\varepsilon$ nên ta có

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus D} |\hat{v}_\varepsilon(\omega,\varpi) - \hat{v}_0(\omega,\varpi)|^2 d\omega d\varpi \le \frac{1}{a_\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\lambda(\omega,\varpi)(\hat{v}_\varepsilon(\omega,\varpi) - \hat{v}_0(\omega,\varpi))\right|^2 d\omega d\varpi$$

kết hợp với (14), ta suy ra

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus D} |\hat{v}_\varepsilon(\omega,\varpi) - \hat{v}_0(\omega,\varpi)|^2 d\omega d\varpi \le \frac{B^2}{a_\varepsilon^2}$$

Chọn a_ε là nghiệm dương của phương trình

$$e^{2a_\varepsilon}.B^2.\varepsilon = \frac{B^2}{a_\varepsilon^2}$$

nghĩa là

$$a_\varepsilon^2.e^{2a_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \tag{16}$$

Vì hàm số $h(y) = y^2.e^{2y}$ tăng ngặt trên $(0,\infty)$ và $h(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ nên phương trình (16) có duy nhất một nghiệm a_ε thỏa $a_\varepsilon \to +\infty$ khi $\varepsilon \to 0$. Hơn nữa, từ (16) và với ε đủ nhỏ, ta có

$$4a_\varepsilon > 2\ln a_\varepsilon + 2a_\varepsilon = \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Suy ra

$$\frac{1}{a_\varepsilon^2} \le 16.\left[\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]^{-2}$$

Kết hợp với (15-17), ta nhận được

$$|v_\varepsilon - v_0|_2^2 \le \frac{2B^2}{a_\varepsilon^2} \le 32.B^2\left[\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]^{-2}$$

nghĩa là,

$$|v_\varepsilon - v_0|_2 \le \frac{4B\sqrt{2}}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

và định lý được chứng minh.

REGULARIZATION OF AN INVERSE TIME PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION

Nguyễn Cam, Phạm Hoàng Quân

Abstract:
We consider an inverse time problem for the heat equation. The problem is formulated as an integral equation of the convolution type and is regularized via the Tikhonov method with error estimates given.

Tài liệu tham khảo

[1] DANG DINH ANG, On the backward parabolic equation: A critical survey of some current methods, Nummerical Analysis and Mathematical Modelling, Warsaw, 509-515, 1990.

[2] DANG DINH ANG and DANG DINH HAI, On the backward heat equation, Annales, Polomici Mathematici, LII, 29-32, 1990.

[3] DANG DINH ANG, Stabilized approximate solutions of the inverse time problem for a parabolic evolution, J.Math. Anal. Appl., 1, 148-155, 1985.

[4] A.N. TIKHONOV and V.Y. ARSENIN, Solutions of ill-posed problem, Winston, Washington, 1977.