PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN HÀM VỚI ĐỐI SỐ CHẬM VÔ HẠN TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Lê Hoàn Hóa
Khoa Toán Trường Đại Học Sư Phạm
Chu Văn Thọ
Bộ Môn Toán Trường Đại Học Y-Dược Thành Phố Hồ Chí Minh

(Nhận được ngày 07/01/1998)

Tóm tắt:

Bài báo này tập trung vào khảo sát sự tồn tại nghiệm, sự phụ thuộc liên tục, sự ổn định đều và nghiệm tuần hoàn của nghiệm phương trình vi phân hàm với đối số chậm vô hạn trong không gian Banach vô hạn chiều. Hai dạng chính yếu là:

Dạng (A) : $x'(t) = f(t, x(t), x_t) + g(t, x(t), x_t)$ $(t \in R)$

Dạng (B) : $[x(t) - f(t, x(t-r))]' = g(t,x(t),x_t)$ $(t \in R)$

Mở đầu:

Trong trường hợp không gian hữu hạn chiều, với đối số chậm hữu hạn và không có biến x(t). Hai bài toán trên đã được nghiên cứu giải quyết trong một số điều kiện nào đó của f và g bởi M.A.CRUZ và J.K.HALE năm 1969; O.LOPES năm 1973-1975; G.HERTZER năm 1975; G.B.GUSTAFSON và K.SCHMITT năm 1974 (xem tài liệu trích dẫn của [4]).

Trong trường hợp không gian Banach vô hạn chiều với đối số chậm hữu hạn và không có biến x(t), hai bài toán trên đã được nghiên cứu giải quyết trong một số điều kiện nào đó của f và g bởi K. SCHMITT và L.H. HOA năm 1993 (xem [4]).

Gọi E là không gian Banach với chuẩn $|.|$.

Gọi $C = CB(\mathbb{R}-, E)$ là không gian Banach các hàm liên tục, bị chặn từ $R- = (-\infty,0]$... vào E với chuẩn $\|.\|$; $\|x\| = \sup\{|x(t)| / t \in R-\}$.

Gọi C(R, E) là không gian các hàm liên tục từ R vào E.

Với mọi $x \in C(R,E)$, $\forall t \in R$, định nghĩa x_t như sau: $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ với $\theta \in R-$.rõ ràng $x_t \in C$ nếu có $\sigma \in R$ và $\varphi \in C$ sao cho $x_\sigma = \varphi$.

Với mọi $\sigma \in R$, hàm u: $R \to E$ được gọi là nghiệm của dạng (A) hay (B) trên $[\sigma,\infty)$ nếu $u_t \in C$ với mỗi $t \in R$, đạo hàm $u'_{(t)}$ tồn tại trên $[\sigma,\infty]$ và thỏa dạng (A) hay (B) trên $[\sigma,\infty)$

Bài toán với điều kiện ban đầu của phương trình dạng (A) hay (B) là bài toán cho trước $\varphi \in C$ và $\sigma \in R$, tìm nghiệm u của phương trình dạng (A) hay (B) trên $[\sigma,\infty)$ và thỏa $u_\sigma = \varphi$.

Sự tồn tại nghiệm tuần hoàn của phương trình dạng (A) hay (B) là chứng minh sự tồn tại của $\psi \in C$ sao cho với mọi $\sigma \in R$, ta có sự tồn tại nghiệm u của phương trình dạng (A) hay (B) trên $[\sigma,\infty)$ thỏa $u_\sigma = \psi$, có tính tuần hoàn chu kỳ ω khi f và g cũng là hàm tuần hoàn theo t, có chu kì ω.

CÁC ĐỊNH LÝ CHÍNH YẾU SỬ DỤNG

⊙ ĐỊNH LÝ A: (Định lý 3, [5])

Gọi Y là không gian lồi địa phương với họ nửa chuẩn tách $\mathscr{P}$ trên Y và gọi D là tập con của Y.

Cho toán tử U: D $\to$ Y

Với mỗi a $\in$ Y, định nghĩa U_a: D $\to$ Y bởi : với x $\in$ D

$$U_a(x) = U(x) + a$$

Toán tử U được gọi là thỏa điều kiện (A) trên tập con Ω của Y nếu :

(A.1) Với mỗi a $\in \Omega$, $U_a(D) \subset D$

(A.2) Với mỗi a $\in \Omega$ và p $\in$ P, tồn tại $k_a \in N$ với tính chất:

$\forall\, \varepsilon > 0$, tồn tại r $\in N^*$, $\delta > 0$ sao cho với mọi x, y $\in$ D

với $\alpha_a^P(x, y) < \varepsilon + \delta$ ta có:

$$\alpha_a^P(U_a^r(x), U_a^r(y)) < \varepsilon$$

trong đó $\alpha_a^P(x,y) = \max \left\{p(U_a^i(x) - U_a^i(y)) \ / \ i, j = 0,1,\ldots,k_a\right\}$

Gọi Y là không gian lồi địa phương, đủ theo dãy với họ nửa chuẩn tách $\mathscr{P}$.

Cho U và C là những toán tử trên y sao cho:

(i) U thỏa điều kiện (A) trên Y.

(ii) Với mọi p $\in \mathscr{P}$, tồn tại k = k(p) > 0, sao cho:
$p(U(x) - U(y)) \leq kp(x - y)$ với mọi x, y $\in$ Y

(iii) Tồn tại $x_0 \in$ Y với tính chất:
Với mọi p $\in \mathscr{P}$, tồn tại r $\in$ N và $\lambda \in [0,1)$
(r và λ phụ thuộc p) sao cho:
$$p(U_{x_0}^r(x) - U_{x_0}^r(y)) \leq \lambda p(x-y) \text{ với mọi } x, y \in Y$$

(iv) C là toán tử compăc sao cho:
$p(C(A)) < +\infty$ khi $p(A) < +\infty$ với A là tập con của Y, với mọi p $\in$ P.

(v) $\displaystyle\lim_{p(x)\to\infty} \frac{p(C(x))}{p(x)} = 0 \qquad \forall p \in \mathscr{P}.$

Khi đó U + C có điểm bất động.

⊙ ĐỊNH LÝ B VÀ ĐỊNH LÝ C: (Xem [4])

Gọi s là không gian metric sao cho $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ trong đó S_n là tập con compăc, khác rỗng của S thỏa các tính chất sau:

(i) $S_n \subset S_{n+1}$ với mọi $n \in N*$

(ii) Với mỗi tập con compăc K của S, tồn tại n $\in$ N* sao cho $K \subset S_n$.

Gọi C(S) là không gian của tất cả các ánh xạ liên tục từ S vào E (với E là không gian Banach, có chuẩn $|.|$) Với mỗi n $\in$ N*, $\forall$x $\in$ C(S), đặt

$$P_n(x) = \sup\{|x(s)| : s \in S_n\}$$

Đặt $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n} p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$ với x, y ∈ C(S)

Khi đó $(p_n)_n$ là họ nửa chuẩn tách và d là metric trên C(S). Ta có C(S) là không gian Fréchet và dãy $(x_k)_k$ trong C(S) hội tụ tới x nếu và chỉ nếu:

$$\lim_{k\to\infty} P_n(x_k - x) = 0 \text{ với mọi } n \in N^*$$

⊙ĐỊNH LÝ B (Định lý 1, [4])

Tập con A của C(S) là tập compăc tương đối khi và chỉ khi với mỗi $n \in N^*$, A đẳng liên tục trên S_n và tập $\{ x(s) : x \in A, s \in S_n \}$ là tập compăc tương đối trong E.

⊙ ĐỊNH LÝ C: (Định lý 2, [4])

Gọi CB(S) là không gian Banach của tất cả các ánh xạ bị chặn, liên tục trên S vào E, với chuẩn $\|.\|$.

$$\|x\| = \sup\{|x(s)| : s \in S\}$$

Cho tập con A của CB(S) và đặt $A(S) = \{x(s) : s \in S, x \in A\}$

(a) Nếu A(S) là tập compăc tương đối trong E thì A compăc tương đối trong CB(S).

(b) Nếu S hoàn toàn bị chặn và A đẳng liên tục trên S thì hai mệnh đề sau là tương đương:

(i) A compăc tương đối trong CB(S).

(ii) A(S) compăc tương đối trong E.

BÀI TOÁN I

SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN HÀM VỚI ĐỐI SỐ CHẬM VÔ HẠN

⊙ Định lý I:

(I.1) Cho f: R x E x C → E là ánh xạ liên tục với tính chất sau:

Với mỗi σ ∈ R, với mỗi n ∈ N, n > σ, tồn tại 2 số dương l_n; h_n sao cho với mọi t ∈ [σ, n]

$$|f(t,u,\Phi) - f(t,v,\Phi')| \le l_n |u-v| + h_n \|\Phi - \Phi'\|$$

với mọi Φ, Φ' ∈ C, u, v ∈ E.

(I.2) Cho g: R x E x C → E là ánh xạ compăc với tính chất sau:

(I.3) $\lim_{\|\Phi\|\to\infty} \frac{|g(t,u,\Phi)|}{\|\Phi\|} = 0$ đều theo t trên mỗi tập bị chặn của R và đều theo u ∈ E.

- Cho trước φ ∈ C và cho trước σ ∈ R ta xét phương trình vi phân hàm với điều kiện ban đầu sau:

$$(I)\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x_t) + g(t, x(t), x_t) \quad (t \ge \sigma) \quad I^* \\ x_\sigma = \varphi \end{cases}$$

Khi đó phương trình (I) có lời giải trên R, nghĩa là phương trình (I^*)có nghiệm trên $[\sigma,+\infty)$.

BÀI TOÁN II

SỰ PHỤ THUỘC LIÊN TỤC CỦA NGHIỆM

⊙ **Định lý II:**

▪ Cho $\{A(t)\}$ là họ các toán tử tuyến tính bị chặn từ E x C vào E, phụ thuộc liên tục theo $t \in \mathbb{R}$. Cho E là không gian Banach với chuẩn $|.|$.

C = CB(R-, E) là không gian Banach với chuẩn $\|.\|$ Với mỗi $x \in C$, ta có :

$$\|x\| = \sup\{|x(t)|: t \in R-\}.$$

E x C là không gian Banach với chuẩn $|||.|||$ được định nghĩa bởi:

$$|||(u, \Phi)||| = |u| + \|\Phi\| \quad \text{với } (u, \Phi) \in E \times C$$

▪ $|A(t)(u,\Phi) - A(t)(v, \varphi) = |A(t)(u - v, \Phi - \varphi)| \le$
$\|A(t)\| \; |||(u - v, \Phi - \varphi)||| = \|A(t)\| (|u - v| + \|\Phi - \varphi\|)$

Đặt $K_n = \sup\{\|A(t)\| ; t \in [\sigma, n]\}$ (với $n \in N$, $n > \sigma$)
Ta có $|A(t)(u,\Phi) - A(t)(v, \varphi)| \le K_n(|u - v|, \|\Phi - \varphi\|)$
với mọi $t \in [\sigma, n]$, với mọi $u, v \in E$, với mọi $\Phi, \varphi \in C$.
Do đó $A(t)(u, \Phi)$ thỏa (I.1), trong đó định bởi:

$f: R \times E \times C \to E$
$f(t, u,\Phi) = A(t)(u, \Phi)$

▪ Với mỗi $k \in N$ cho $g_k: R \times E \times C \to E$ thỏa các điều kiện (I.2), (I.3) và sao cho dãy $(g_k)_k$ hội tụ đều về g^0 [$g^0: R \times E \times C \to E$ thỏa (I.2), (I.3)].
Cho $(\varphi_k)_k$ là dãy trong C sao cho $\lim_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi^0$ trong C.

Gọi x^k, $k \in N$, là nghiệm của phương trình:

$$(II_k): \begin{cases} x'(t) = A(t)(x(t), x_t) + g_k(t, x(t), x_t) \; (t \ge \sigma) \; (II_k^*) \\ x_\sigma = \varphi_k \end{cases}$$

▪ Giả sử phương trình (II^0) có nghiệm duy nhất, gọi là x_0

$$(II^0): \begin{cases} x'(t) = A(t)(x(t), x_t) + g^0(t, x(t), x_t) \; (t \ge \sigma) \\ x_\sigma = \varphi^0 \end{cases}$$

▪ Khi đó $\lim_{k\to\infty} x^k = x_0$, nghĩa là $\lim_{k\to\infty} x^k\big|_{[\sigma,\infty)} = x_0\big|_{[\sigma,\infty)}$ trong x_σ.

BÀI TOÁN III

SỰ ỔN ĐỊNH ĐỀU CỦA NGHIỆM

* Khảo sát phương trình

$$\text{(III)} \quad \boxed{\begin{cases} x'(t) = A(t)(x(t), x_t) + g(t, x(t), x_t) \quad (t \geq \sigma) \quad \text{(III*)} \\ x_\sigma = \varphi \end{cases}}$$

trong đó A(t) và g thỏa các điều kiện đã nói ở bài toán II.

* Giả sử phương trình (III) có nghiệm duy nhất là $x(\sigma,\varphi)$ với $\sigma \in R$ và $\varphi \in C$ nào đó.

* Theo G.Seifert (xem tài liệu trích dẫn từ [7] và Jack K. Hale (xem [3]) và theo LIAPUNOV (xem [0]) về định nghĩa của sự ổn định của nghiệm ta có nghiệm $x(\sigma,\varphi)$ của (III) trên $[\sigma.\infty)$ được gọi là ổn định đều trên $[\sigma.\infty)$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với $\sigma_1 \geq \sigma$ và với mọi $\phi \in C$ với $\|\Phi - x_{\sigma_1}\| < \delta$, kéo theo $|u(\sigma_1, \Phi)(t) - x(\sigma,\varphi)(t)|_E < \varepsilon$ với mọi $t \geq \sigma_1$.

⊙ **Định lý III:**

Cho $x(\sigma, \varphi)$ là nghiệm duy nhất của phương trình (III) với $\sigma \in \mathbb{R}$ và $\varphi \in C$ đã cho trong đó A(t) và g thỏa điều kiện của bài toán (II). Khi đó nghiệm $x(\sigma, \varphi)$ ổn định đều trên $[\sigma, \infty)$.

BÀI TOÁN IV

NGHIỆM TUẦN HOÀN CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN HÀM TUẦN HOÀN

* Xét phương trình:

$$\boxed{\text{IV}\begin{cases} x'(t) = A(t)(x(t), x_t) + g(t, x(t), x_t) \quad (t \geq \sigma) \\ x_\sigma = \varphi \end{cases}} \qquad \text{(IV*)}$$

Trong đó:

(IV.1) {A(t)} là họ các toán tử tuyến tính bị chặn từ E x C vào E, phụ thuộc liên tục vào t, tuần hoàn với chu kỳ ω theo t. ($\omega > 0$).

(IV.2) g: R x E x C → E là hàm tuần hoàn với chu kỳ ω theo t và thỏa các điều kiện (I.2), (I.3).

(IV.3) Với mọi $\varphi \in C$, với mọi $\sigma \in \mathbb{R}$, phương trình (IV) có nghiệm duy nhất $x(\varphi)$ trên R, nghĩa là phương trình (IV*) có nghiệm duy nhất trên $[\sigma, \infty)$.

(IV.4) Phương trình $\begin{cases} y'(t) = A(t)(y(t), y_t) & (t \geq s) \\ y_s = \varphi \end{cases}$ có nghiệm $y(\sigma, 0) = 0$ ổn định tiệm cận đều. Nghĩa là có $a > 0$, $b > 0$ sao cho $\|y_t(s, \varphi)\| \leq b.e^{-a(t-s)}.\|\varphi\|$ với $t \geq s \geq \sigma$, với mọi $\varphi \in C$. (Xem [3]).

⊙ **Định lý IV:**

Cho phương trình (IV) thỏa các điều kiện (IV.1), (IV.2), (IV.3), (IV.4). Khi đó phương trình (IV*) có nghiệm tuần hoàn chu kỳ ω trên $[\sigma, \infty)$.

BÀI TOÁN V

SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH TRUNG HÒA

⊙ **Định lý V:**

Xét phương trình:

$$V\begin{cases} [x(t) - f(t, x(t-r))]' = g(t, x(t), x_t) & (t \geq \sigma) \ (V^*) \\ x_\sigma = \varphi \end{cases} \quad (r > 0)$$

(V.1) $f: R \times E \to E$ liên tục theo $(t, u) \in R \times E$ và với mỗi $n \in N$, tồn tại $a_n > 0$ sao cho

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq a_n |u - v|$$

với mọi $u, v \in E$, $t \in [\sigma, n]$, $n > \sigma$

(V.2) $g: R \times E \times C \to E$ thỏa (I.2), (I.3)

Khi đó phương trình (V) có nghiệm trên $\mathbb{R}$, nghĩa là phương trình (V*) có nghiệm trên $[\sigma, \infty)$.

BÀI TOÁN VI

SỰ PHỤ THUỘC LIÊN TỤC CỦA NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH TRUNG HÒA

⊙ **Định lý VI:**

Với mỗi $k \in N$, xét phương trình

$$(VI_k)\begin{cases} [x(t) - A(t)x(t-r)]' = g_k(t, x(t), x_t) & (t \geq \sigma) \\ x_\sigma = \varphi_k \end{cases}$$

Trong đó $\varphi_k \in C$ và $\{A(t)\}$ thỏa (VI*) và g_k thỏa (V.2)

Đặt x^k là nghiệm của (VI_k) trên IR.

Giả sử rằng dãy $(g_k)_k$ hội tụ đều về g^0 và $\lim\limits_{k\to+\infty} \varphi_k = \varphi^0$ trong C.

Giả sử rằng bài toán $(VI^0)\begin{cases}[x(t)-A(t)x(t-r)]' = g^0(t, x(t), x_t) & (t \geq \sigma)\\ x_\sigma = \varphi^0\end{cases}$ có nghiệm duy nhất, gọi là x_0.

❖ Khi đó $\lim\limits_{k\to+\infty} x^k = x_0$ trong X.

BÀI TOÁN VII

SỰ ỔN ĐỊNH ĐỀU CỦA NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH TRUNG HÒA

⊙ Định lý VII:

Giả sử $x(\sigma,\varphi)$ là nghiệm duy nhất của phương trình (VI) với $\sigma \in R$ và $\varphi \in C$ cho trước.

Khi đó nghiệm $x(\sigma, \varphi)$ ổn định đều trên $[\sigma, \infty)$.

BÀI TOÁN VIII

NGHIỆM TUẦN HOÀN CỦA PHƯƠNG TRÌNH TRUNG HÒA TUẦN HOÀN

Xét phương trình:

$$\boxed{(VIII)\begin{cases}[x(t)-A(t)x(t-r)]' = g(t, x(t), x_t) \quad (t \geq \sigma) \quad (VIII^*)\\ x_\sigma = \varphi\end{cases}} \qquad r > 0$$

(VIII.1) $\{A(t)\}$ họ toán tử tuyến tính bị chặn trên E vào chính nó phụ thuộc liên tục theo t, tuần hoàn với chu kỳ ω theo t.

(VIII.2) g: R x E x C $\to$ thỏa điều kiện (I.2), (I.3) và tuần hoàn chu kỳ ω theo t.

(VIII.3) Với mọi $\varphi \in C$, phương trình (VIII) có nghiệm duy nhất $x(\varphi)$ trên IR, nghĩa là phương trình ($VIII^*$) có nghiệm duy nhất trên $[\sigma, \infty)$.

(VIII.4) Phương trình : $\begin{cases}[y(t)-A(t)(y(t-r))]' = 0 & (t > s)\\ y_s = \varphi\end{cases}$ có nghiệm $y(\sigma, 0) = 0$ ổn định tiệm cận đều. Nghĩa là có $a > 0$, $b > 0$ sao cho $\|y_t(s, \varphi)\| \leq b.e^{-a(t-s)}.\|\varphi\|$ với $t \geq s \geq \sigma$, $\varphi \in C$. (xem [3]).

⊙ Định lý VIII:

Cho phương trình (VIII) thỏa các điều kiện (VIII.1), (VIII.2), (VIII.3), (VIII.4). Khi đó phương trình ($VIII^*$) có nghiệm tuần hoàn chu kỳ ω trên $[\sigma, \infty)$.

⊙ Định lý VIII:

Cho phương trình (VIII) thỏa các điều kiện (VIII.1), (VIII.2), (VIII.3), (VIII.4). Khi đó phương trình (VIII*) có nghiệm tuần hoàn chu kỳ ω trên $[\sigma, \infty)$.

DELAY – DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INFINITE DELAYS IN A BANACH SPACE

Lê Hoàn Hóa, Chu Văn Thọ

Abstract:
Sufficient conditions are given for the existence, uniqueness and continuous dependence of solutions on the initial data of delay – differential equations with infinite delays in a Banach space. These conditions are also shown to be sufficient for the uniform stability of the solutions of these equations. Two kinds of delay – differential equations are:

(A): $x'(t) = f(t, x(t), x_t) + g(t, x(t), x_t)$ $(t \in R)$

(B): $[x(t) - f(t, x(t-r))]' = g(t, x(t), x_t)$ $(t \in R)$

Tài liệu tham khảo

[0] 6.Л.ДЕМИДОВИЧ
ЛeKЦuu no Mameamureckoй meopuu ycmoйrubocmu uzg. "Hayka" – Mockba 1967, 472c.

[1] K.DEIMLING
• Nonlinear Functional Analysis
Springer – Verlerg – 1985

[2] I.GYORI and G.LADAS
• Oscillation theory of delay differentical equations
Clarendon Press – Oxford – 1991

[3] J.K. HALE
• Applied Methematical Sciences – Volume 3.
Springer – Verlag Newyork Inc - 1971

[4] L.H. HOA and K. SCHMITT
•Periodic solutions of functional differential equations of retard and Neural Types in Banach Space.
ĐHSP – VN and UTAH University – USA - 1994

[5] L.H. HOA and K. SCHMITT
• Fixed Point Theorems of Krasnoselskii Type in Locally Convex Space and Applications to Integral Equations

Result in mathematics – Vol.25 (1994) – Birkhauser Verlag, Basel (C)

[6] L.H. HOA

• Giáo trình giải tích phi tuyến

• Giáo trình tích phân trong không gian Banach

- 1996 – ĐHSP – Tp.HCM

[7] SHIGEO KATO

• Existence, Uniqueness, and Continuous Dependence of Solutions of Delay – Differential Equations with Infinite Delays in a Banach Space.

Kitami Institute of Technology – Hokkaido – Japan - 1994

[8] T.V. TAN

• Giáo trình không gian vectơ Topô

• Định lý ASCOLI – không gian BAIRE (giáo trình)

- 1996 – ĐHSP – Tp.HCM