

TÍNH DẦM SANDWICH BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Phan Đình Huấn
Trường Đại Học Kỹ Thuật
(Bài nhận ngày 28/04/1998)

TÓM TẮT :

Sandwich là một loại vật liệu composite đặc biệt. Vật liệu sandwich thông thường có hai lớp mặt cứng và một lớp lõi mềm.

Trong bài này, phần tử loại chuyển vị dầm sandwich được thiết lập để tính các kết cấu dầm vật liệu sandwich ba lớp.

Kết quả tính được so sánh với kết quả giải tích. Các kết quả này phù hợp với nhau.

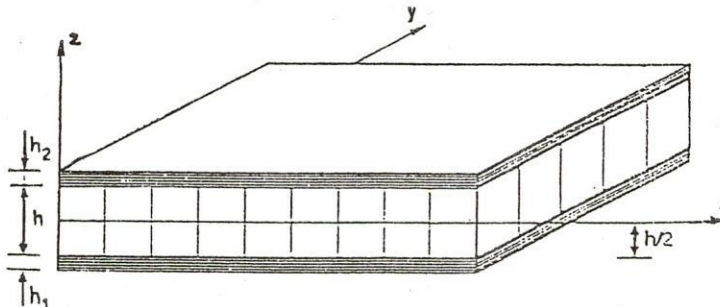
1. Các giả thuyết

Trong thực tế, hầu hết các vật liệu sandwich thỏa mãn các giả thuyết sau:

- Hai lớp mặt có môđun đàn hồi cao và có thể chịu uốn.
- Lớp lõi giữa chỉ có khả năng chịu cắt ngang.
- Vật liệu của các lớp mặt, lớp lõi là các vật liệu đẳng hướng.
- Hai lớp mặt có bề dày nhỏ so với bề dày lớp lõi.

2. Cơ sở lý thuyết

2.1. Trường chuyển vị



Hình 1

Lý thuyết sandwich dùng sơ đồ chuyển vị bậc nhất cho lớp lõi, nghĩa là

$$\begin{aligned} u_s(x, y, z) &= u_s(x, y, 0) + z \varphi_x(x, y) \\ v_s(x, y, z) &= v_s(x, y, 0) + z \varphi_y(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

với u_s, v_s, w_s là chuyển vị của lõi theo phương x , phương y và phương z .

φ_x, φ_y là các góc xoay quanh trục x và trục y .

Do tính liên tục về chuyển vị ở vị trí tiếp giáp giữa lớp lõi và lớp da, biểu thức chuyển vị u_1, v_1 của lớp da dưới và u_2, v_2 của lớp da trên được xác định:

$$u_1(x, y, z) = u_s(x, y, 0) - \frac{h}{2} \varphi_x(x, y) \quad (2)$$

$$v_1(x, y, z) = v_s(x, y, 0) - \frac{h}{2} \varphi_y(x, y)$$

$$u_2(x, y, z) = u_s(x, y, 0) + \frac{h}{2} \varphi_x(x, y) \quad (3)$$

$$v_2(x, y, z) = v_s(x, y, 0) + \frac{h}{2} \varphi_y(x, y)$$

2.2. Quan hệ giữa ngoại lực và biến dạng

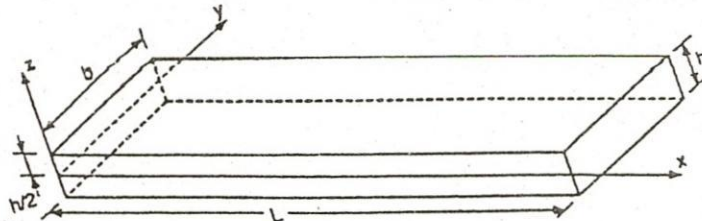
Đối với một kết cấu sandwich chịu uốn thuần túy, quan hệ giữa ngoại lực và biến dạng có dạng

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz}^* \\ \gamma_{xz}^* \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\kappa_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \kappa_y = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \kappa_{xy} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \quad (5)$$

với

$$\gamma_{yz}^* = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y, \quad \gamma_{xz}^* = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x$$



Hình 2

Trường hợp dầm sandwich (hình 2), do $M_y = M_{xy} = Q_y = 0$ biểu thức (4) được đơn giản hóa như sau:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \gamma_{xz}^* \end{bmatrix} \quad (6)$$

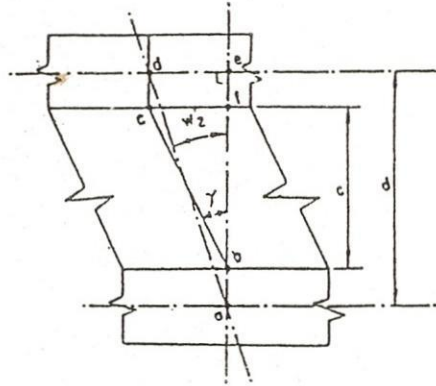
Trong đó D_{11} là độ cứng uốn của dầm sandwich. Độ cứng này là tổng độ cứng các lớp mặt và lớp lõi.

$$D_{11} = E_r \frac{bt^3}{6} + E_r \frac{btd^2}{2} + E_c \frac{bc^3}{12} \quad (7)$$

E_r và E_c lần lượt là môđun đàn hồi của các lớp mặt và của lõi,

d là khoảng cách giữa đường trung bình của lớp mặt trên và đường trung bình của lớp mặt dưới:

$$d = \frac{h + c}{2} \quad (8)$$



Hình 3 : Biến dạng trượt của dầm sandwich

Qua các quan hệ hình học ở hình 3, biến dạng trượt được tính qua biểu thức:

$$\gamma = \frac{d}{c} \frac{dw_2}{dx} \quad (9)$$

với w_2 là độ võng của dầm do trượt ngang.

Lực cắt được suy ra:

$$Q_x = \frac{AG_2c}{d} \gamma_{xz}^* \quad (10)$$

với

$$A = \frac{bd^2}{c}$$

Do vậy

$$F_{ss} = \frac{AG_2c}{d} \quad (11)$$

G_2 là môđun đàn hồi trượt vật liệu lõi

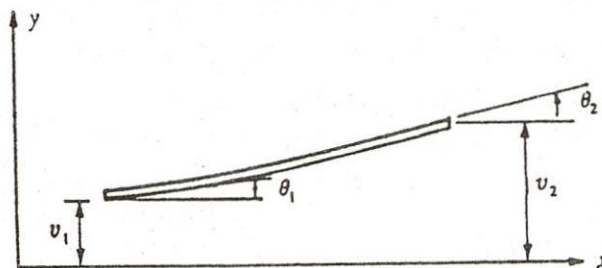
3. Mô hình tính phần tử hữu hạn

Xét dầm sandwich ở hình 4. Chuyển vị tại các nút:

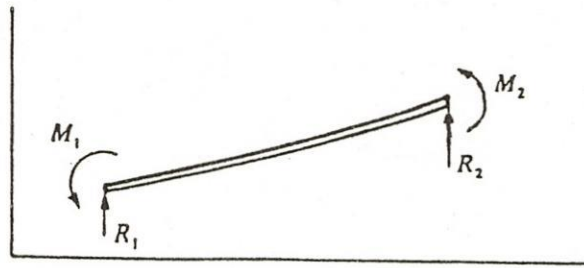
$$\{\delta^*\} = \left[w_1, \frac{\partial w_1}{\partial x} \right] \quad (12)$$

Trường chuyển vị có dạng:

$$\{u\} = [N] \{\delta^*\} \quad (13)$$



a) Chuyển vị và góc xoay



b) Lực và mômen

Hình 4 : Các chuyển vị nút và lực nút

Các hàm dạng $[N_1, N_2, N_3, N_4]$ là các đa thức bậc ba được trình bày trong phần phụ lục.

Các ma trận độ cứng được tính từ công thức quen thuộc:

$$[K^*] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (14)$$

Đối với độ võng uốn, ma trận độ cứng uốn có dạng:

$$[K_b^*] = \int_V [B_b]^T [D_b] [B_b] dV \quad (15)$$

trong đó

$$[D_b] = D_{11} \quad (16)$$

$$[B_b] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 N_4}{\partial x^2} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Đối với độ võng trượt, ma trận độ cứng trượt có dạng:

$$[K_s^*] = \int_V [B_s]^T [D_s] [B_s] dV \quad (18)$$

trong đó

$$[D_s] = AG_s \quad (19)$$

$$[B_s] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Các số hạng của ma trận độ cứng uốn và ma trận độ cứng trượt được trình bày trong phần phụ lục.

4. Các thí dụ số và bình luận kết quả

Việc kiểm chứng mô hình tính được thực hiện bằng cách so sánh các kết quả tính cho bởi mô hình này với các kết quả giải tích có sẵn trong các tài liệu [1], [2].

4.1. Thí dụ 1 :

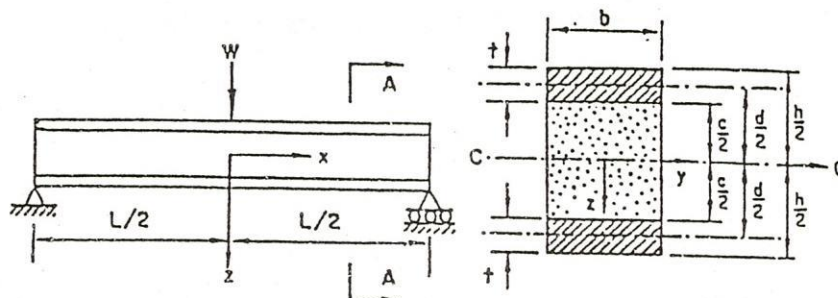
Xác định độ võng tại điểm giữa của hai dầm có trọng lượng tương đương:

a. Dầm sandwich có chiều dài $L = 500$ mm, tựa trên hai gối tựa đơn

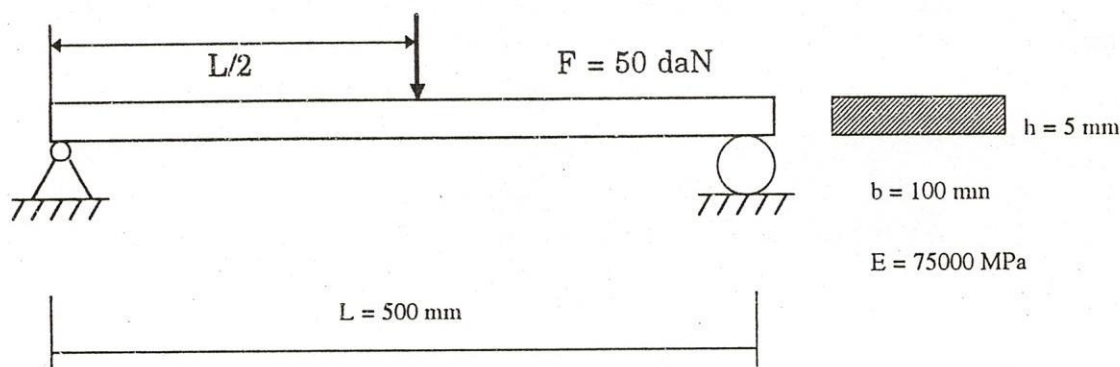
(hình 5). Hai lớp mặt có chiều dày như nhau $t = 2,5 \text{ mm}$, ngăn cách bởi một lớp lõi có bề dày $c = 25 \text{ mm}$. Bề rộng dầm $b = 100 \text{ mm}$. Cơ tính vật liệu của lớp da và lớp lõi $E_1 = E_2 = 75000 \text{ MPa}, G_1 = 20 \text{ MPa}$.

Dầm chịu tải tập trung ở điểm giữa $W = 50 \text{ daN}$

b. Dầm vật liệu đẳng hướng. Dầm này giống dầm ở câu a, chỉ khác là không có lớp lõi (hình 6)



Hình 5 : Dầm sandwich



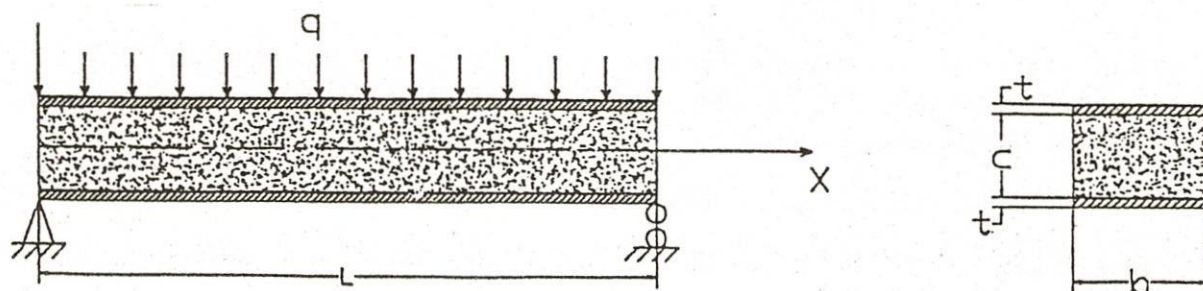
Hình 6 : Dầm đẳng hướng

Bài toán	Độ võng tại điểm giữa (mm)	
	Mô hình PTHH	Tài liệu [1]
Dầm sandwich a	1,22	1,22
Dầm đẳng hướng b	16,7	16,7

Bảng 1: Độ võng của dầm đẳng hướng và dầm sandwich gối tựa đơn chịu tải tập trung

4.2. Thí dụ 2 :

Một dầm dài $L = 600 \text{ mm}$ tựa trên hai gối tựa đơn chịu tải phân bố đều $q = 10 \text{ N/mm}$ (Hình 7). Hai lớp mặt có cùng bề dày $t = 2 \text{ mm}$. Bề dày lõi $c = 100 \text{ mm}$. Cơ tính vật liệu của các lớp $E_1 = E_2 = 69000 \text{ MPa}, G_1 = 55 \text{ MPa}$. Xác định độ võng tại điểm giữa của dầm.



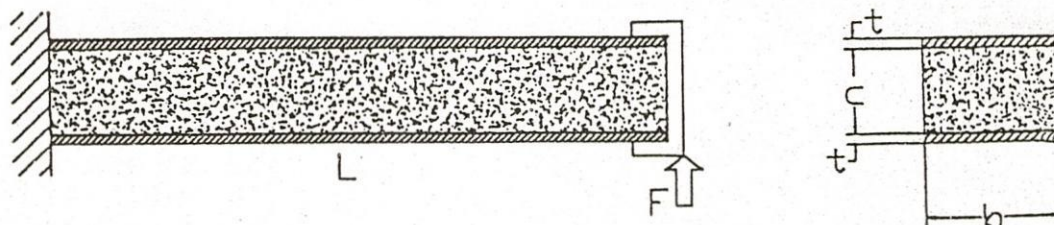
Hình 7 : Dầm chịu tải phân bố đều

Bài toán	Độ võng tại điểm giữa (mm)	
	Mô hình PTHH	Tài liệu [2]
Dầm sandwich	1,02	1,02

Bảng 2 : Dầm sandwich ba lớp chịu tải phân bố đều.

4.3. Thí dụ 3 :

Xét dầm sandwich ngàm một đầu có kích thước và vật liệu có cơ tính như ở hình 8.



$b = 100\text{mm}$, $L = 1000\text{mm}$, $t = 2,15\text{mm}$, $E_f = 65200\text{MPa}$, $c = 80,2\text{mm}$, $G_c = 7,7\text{MPa}$

Hình 8 : Dầm sandwich ngàm một đầu

Bài toán	Độ võng tại đầu tự do (mm)	
	Mô hình PTHH	Tài liệu [1]
Dầm sandwich	2,06	2,06

Bảng 3 : Dầm sandwich ngàm một đầu chịu tải tập trung.

4.4. Bình luận

Các nhận xét sau được rút ra từ kết quả ở các bảng 1, 2, 3:

– Các kết quả cho bởi phương pháp phần tử hữu hạn tương thích với kết quả giải tích.

– Độ võng của dầm sandwich có giá trị rất nhỏ so với độ võng của một dầm kim loại tương đương có cùng trọng lượng. Ở thí dụ 1, tỉ lệ này bằng 1/14. Đây là một ưu điểm của vật liệu sandwich so với vật liệu cổ điển.

5. Kết luận :

Một mô hình phần tử hữu hạn để tính dầm sandwich thiết lập. Mô hình này có thể áp dụng được không những cho các kết cấu dầm sandwich mà cho cả các kết cấu dầm vật liệu đẳng hướng.

Các thí dụ số chứng tỏ tính chính xác và ưu việt của phương pháp.

PHỤ LỤC

- Hàm dạng :

$$N_1 = \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1$$

$$N_2 = \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x$$

$$N_3 = -\frac{2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2}$$

$$N_4 = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}$$

- Ma trận độ cứng uốn:

$$[K_b^e] = \frac{F}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

- Ma trận độ cứng trượt:

$$[K_s^e] = AG_s \begin{bmatrix} \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{L}{30} \\ -\frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{L}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{bmatrix}$$

A FINITE ELEMENT FOR SANDWICH BEAM ANALYSIS

ABSTRACT :

Sandwich is a special kind of multilayer composite material. Conventional sandwich material has two stiff face layers and a weak core.

In this paper, a beam element of the displacement type has been formulated for bending problems of three-layer sandwich beams.

The results are compared with analytical ones. There is a good agreement between them.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. D. Gay, *Matériaux composites*, Hermes, 1991.
2. Howard G. Allen, *Analysis and Design of Structural Sandwich Panels*, Pergamon Press, 1969.
3. George R. Buchanan, *Finite Element Analysis*, McGraw-Hill International Editions, 1995.
4. Warren C. Young, *Roark's Formulas for Stress & Strain*, McGraw-Hill International Editions 1989.
5. Stephen W. Tsai, *Composite Design*, Think Composites, 1988
6. Zienkiewicz O.C., *The Finite Element Method*, McGraw-Hill Book Company (UK) Limited, 1977.
7. J. M. Berthelot, *Matériaux Composites*, Edition Masson, 1992.
8. Gouri Dhatt & Gilbert Touzot, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine S.A. éditeur, 1984.
9. Phan Dinh Huan, *Calcul et prédimensionnement des structures composites et sandwiches*, Rapport de stage, Laboratoire Mécanique et Matériaux, Université Claude Bernard Lyon I, 1995.