

# Công thức xác định lực căng cáp trong cầu dây văng xét ảnh hưởng đồng thời của độ chùng và độ cứng chống uốn

• **Hoàng Nam**

Trường Đại học Bách khoa, ĐHQG-HCM

(Bài nhận ngày 01 tháng 04 năm 2015, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 26 tháng 04 năm 2015)

## TÓM TẮT

Trong công tác kiểm tra, thẩm định kết cấu cầu dây văng, xác định lực căng cáp luôn là một trong những yêu cầu trước tiên. Lực căng cáp có thể được xác định gián tiếp thông qua mối quan hệ với tần số tự nhiên của cáp. Trong bài báo này, từ phương trình tiệm cận số bước sóng, công thức thực hành để xác định lực căng cáp với ảnh

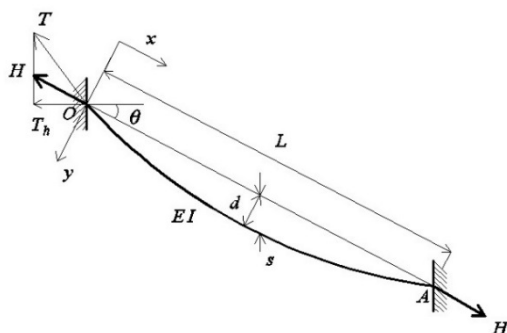
hưởng đồng thời của độ chùng và độ cứng chống uốn dựa vào phương pháp bình phương cực tiểu đã được đề xuất. Tính hiệu quả và độ chính xác của công thức được kiểm chứng đối với trường hợp cầu dây văng Nguyễn Văn Trỗi – Trần Thị Lý ở Đà Nẵng, sử dụng bộ dữ liệu đo dao động cáp tại hiện trường.

**Từ khóa:** Cáp cầu, lực căng cáp, độ chùng, độ cứng chống uốn, tần số đo

## 1. TỔNG QUAN

Cùng với sự phát triển vượt bậc của cơ sở hạ tầng Việt Nam những năm gần đây, ngày càng có nhiều công trình cầu vượt nhịp lớn với chi phí đầu tư cao, kết cấu hiện đại và phức tạp được xây dựng, như cầu dây văng Mỹ Thuận, Cần Thơ, Nguyễn Văn Trỗi - Trần Thị Lý... Trong những công trình này, cáp là một trong những thành phần chịu lực trọng yếu, và do đó việc hiểu rõ ứng xử động lực học của cáp, mà trước tiên là xác định chính xác lực căng trong cáp trở nên hết sức cần thiết. Lực căng trong cáp cầu có thể được đọc trực tiếp từ các đầu đo lực (*load cells*) hay tiến hành thí nghiệm kéo thả sử dụng kích thủy lực (*lift-off test*), tuy nhiên chi phí dành cho hai phương pháp này

rất cao. Do vậy, các phương pháp gián tiếp xác định lực căng bằng cách đo dao động cáp thường được sử dụng phổ biến hơn. Trong các phương pháp gián tiếp, dao động của cáp do tải sử dụng hoặc kích hoạt bằng sức người được ghi nhận, từ đó có tần số tự nhiên của cáp; và lực căng cáp sẽ tính được từ quan hệ giữa lực căng và tần số. Quan hệ đơn giản nhất để tính toán lực căng cáp được Irvine và Caughey (1974) xây dựng từ lý thuyết dây căng (*taut string*), nghĩa là bỏ qua ảnh hưởng của nhiều yếu tố mà đáng kể nhất là độ chùng và độ cứng chống uốn của cáp. Trong thực tế, lực căng cáp xác định từ quan hệ đơn giản thường không đủ độ chính xác, đặc biệt đối với cáp có chiều dài lớn.



Hình 1. Mô hình cáp căng

Nhiều nghiên cứu đã được tiến hành cho đến nay nhằm lượng định chính xác và thuận tiện lực căng trong cáp từ các tần số đo được, trong đó nổi bật là công thức của Zui và cộng sự (1996) dù vẫn còn những hạn chế khi áp dụng cho cáp dài với độ chùng lớn. Tác giả bài báo này trong những năm 2005 - 2008 đã khảo sát phương trình dao động tương ứng với mô hình tổng quát nhất có kể đến độ chùng và độ cứng chống uốn của cáp, và tìm ra được dạng tiệm cận của phương trình đặc trưng tần số [3-4]. Từ dạng tiệm cận này, phương pháp đồ thị có thể được sử dụng để nội suy ra lực căng cáp từ các giá trị tần số dao động cáp đo được [5]. Trong thực tế, nhu cầu về một công thức phổ quát, dễ áp dụng và có độ chính xác cao để xác định lực căng cáp từ tần số vẫn là bức thiết. Do vậy, bài báo này trình bày các bước đề xuất một công thức thực hành, bắt đầu từ mối quan hệ giữa lực căng và tần số dao động cơ bản, và sau đó hiệu chỉnh để tăng độ chính xác bằng cách áp dụng phương pháp bình phương cực tiểu. Tính chính xác của công thức thực hành này sẽ được kiểm chứng thông qua việc xác định lực căng cáp của cầu Nguyễn Văn Trỗi - Trần Thị Lý ở Việt Nam từ bộ dữ liệu đo dao động tại hiện trường.

## 2. PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG TỔNG QUÁT

Một cáp căng của cầu dây văng có thể được mô tả như Hình 1, theo đó, cáp căng theo phương nghiêng một góc  $\theta$  ( $0 \leq \theta < \pi/2$ ) dưới tác dụng của lực căng  $T$ . Hình chiếu lực căng cáp theo phương OA là  $H$  và theo phương ngang là  $T_h$ . Cáp có khối lượng trên một đơn vị chiều dài là  $m$ , chiều dài cáp theo phương OA là  $L$ , mô đun đàn hồi của vật liệu là  $E$ , mô men quán tính tiết diện ngang là  $I$ , và độ chùng ở giữa nhịp theo phương thẳng đứng là  $s$ . Độ cứng chống uốn của cáp xác định bởi tích số  $EI$ . Phương trình dao động của cáp theo phương  $y$  từ lý thuyết động lực học cáp là [2]:

$$H \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + h(t) \frac{\partial^2 y(x)}{\partial x^2} - EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} = 0 \quad (1)$$

trong đó,  $v(x, t)$  = chuyển vị theo phương  $y$  của cáp tại vị trí có tọa độ  $x$  ở thời điểm  $t$ ; Với lực căng đủ lớn, đường biến dạng của cáp dưới tác dụng của trọng lượng bản thân biểu diễn bởi đường parabol [1]:

$$y(x) = 4d \frac{x}{L} \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \quad (2)$$

với  $d = \frac{mgL^2 \cos \theta}{8H}$  = độ chùng cáp ở giữa nhịp theo phương vuông góc với OA, và  $g$  = gia tốc trọng trường. Thành phần  $h(t)$  là độ gia tăng lực căng sinh ra khi cáp dao động. Độ gia tăng này được xác định từ điều kiện tương thích đàn hồi và hình học của một phân tố cáp như sau [1]:

$$\frac{hL_c}{EA} = \frac{8d}{L^2} \int_0^L v(x,t) dx \quad (3)$$

Phương trình (1) tương ứng với mô hình tổng quát nhất - có kể đến độ chùng và độ cứng chống uốn của cáp. Tác giả bài báo này vào năm 2008

đã tiến hành giải phương trình khi nghiên cứu động lực học của hệ cáp có gắn bộ giảm dao động (*dampers*) [4]. Từ phương trình (1), phương trình đặc trưng (*characteristic equation*) theo số bước sóng  $\beta_{on} = 2\pi f_n \sqrt{\frac{m}{H}}$ , với  $f_n$  = tần số của dạng dao động thứ  $n$ , có thể tìm được. Dạng tiệm cận của các phương trình đặc trưng này là [4]:

$$\tan\left(\frac{\beta_{on}L}{2}\right) = \sqrt{\varepsilon}\beta_{on}L \quad (4)$$

$n = 2, 4, 6, \dots$  (các dạng dao động phản đối xứng);

$$\tan\left(\frac{\beta_{on}L}{2}\right) = \frac{\frac{\beta_{on}L}{2} - \left(\frac{4}{\lambda^2}\right)\left(\frac{\beta_{on}L}{2}\right)^3}{1 - \sqrt{\varepsilon}\beta_{on}L\left\{\frac{\beta_{on}L}{2} - \left(\frac{4}{\lambda^2}\right)\left(\frac{\beta_{on}L}{2}\right)^3\right\}} \quad (5)$$

$n = 1, 3, 5, \dots$  (các dạng dao động đối xứng).

Trong phương trình (4) và (5),  $\varepsilon = \frac{EI}{HL^2}$

là tham số độ cứng chống uốn của cáp [3], và

$\lambda^2 = \left(\frac{8d}{L}\right)^2 \frac{EAL}{HL_e}$  là tham số độ chùng cáp [1].

Đối với cáp ở các công trình cầu nhịp lớn, giá trị của  $\lambda^2$  thường dưới 3 [9], trong khi giá trị  $\varepsilon$  giá trị thường ghi nhận trong khoảng  $2.5 \cdot 10^{-6} - 10^{-4}$  [3].

### 3. THIẾT LẬP CÔNG THỨC XÁC ĐỊNH LỰC CĂNG CÁP

Khi tiến hành ghi nhận dao động cáp cũng như tính toán các giá trị tần số dao động riêng, có nhiều nguyên nhân (nhiều tín hiệu, độ phân giải của thiết bị đo...) gây nên sai số, và vì vậy, khó xác định được lực căng (duy nhất) chính xác từ các tần số đo. Phương pháp trung bình có thể được sử dụng để bù trừ một phần các sai số này. Casa (1994) đã đề nghị đại lượng tần số cơ bản hiệu chỉnh  $f_1^*$

định nghĩa như sau:

$$f_1^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f_i}{i} \quad (6)$$

Trong đó,  $f_i$  = tần số tự nhiên đo được của dạng dao động thứ  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), và  $N$  = tổng số dạng dao động cần sử dụng để tính toán lực căng cáp. Đối với cáp dài (độ chùng lớn),  $N$  cần được chọn đủ lớn để tăng độ chính xác của lực căng. Từ đây số bước sóng cơ bản, xác định từ tần số cơ bản hiệu chỉnh, là  $\beta_{01} = 2\pi f_1^* \sqrt{\frac{m}{H}}$ .

Trong các nghiên cứu gần đây, một số dạng quan hệ thực nghiệm giữa lực căng và tần số tự nhiên đã được đề nghị. Tuy nhiên, Ren và cộng sự (2005) chỉ kể đến ảnh hưởng của độ chùng, trong khi Yu và cộng sự (2014) thì chỉ nghiên cứu ảnh hưởng của độ cứng chống uốn. Tổng hợp kết quả từ hai nghiên cứu này, tác giả đề nghị xấp xỉ nghiệm  $\beta_{01}$  của phương trình (5), kể đến ảnh hưởng đồng thời của độ chùng và độ cứng chống uốn của cáp, có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\left(\frac{\beta_{01}L}{\pi}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{a^* \lambda^2} - b^* \sqrt{\varepsilon}}} \quad (7)$$

với  $a^*$  và  $b^*$  = các hệ số điều chỉnh. Chú ý rằng ứng với các giá trị cho trước của tham số  $\lambda^2$  và  $\varepsilon$ , ẩn số  $\beta_{01}$  có thể được giải chính xác từ phương trình (5) bằng các phương pháp số lặp, như là phương pháp Newton-Raphson. Bằng cách so sánh lời giải chính xác với giá trị tương ứng của nghiệm xấp xỉ từ biểu thức (7) và sử dụng giải thuật bình phương cực tiểu, các hệ số điều chỉnh  $a^*$  và  $b^*$  có thể được xác định.

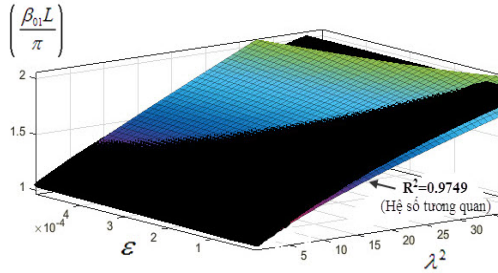
Trong phạm vi biến thiên  $0 < \lambda^2 < 4\pi^2$  và  $10^{-6} < \varepsilon < 5 \times 10^{-4}$ , kết quả tìm được là  $a^* =$

0,6268 và  $b^* = 4$  như trình bày trong **Hình 2** với hệ số tương quan  $R^2 = 0,975$ , nghĩa là mức độ tin cậy hơn 97%. Từ các giá trị  $a^*$  và  $b^*$  vừa xác định này, sau khi biến đổi biểu thức (7), sẽ nhận được công thức xác định lực căng cáp áp dụng cho dạng dao động đầu tiên có kể đến ảnh hưởng của độ chùng cáp  $d$  và độ cứng chống uốn  $EI$  là:

$$H = \frac{H_0}{1 + \frac{0,6268\lambda^2}{\pi^2}} - 4\sqrt{\varepsilon}H \quad (8)$$

Ở đây,  $H_0 = 4mf_1^{*2}L^2$  = lực căng cáp được xác định ở dạng dao động đầu tiên theo lý thuyết dây căng.

cắt ngang của ống HDPE [10]. Bốn cáp số hiệu 301, 302, 320 và 333 được lựa chọn cho việc kiểm chứng, với vị trí như trong **Hình 3** và các đặc trưng cơ học mô tả trong **Bảng 1**.

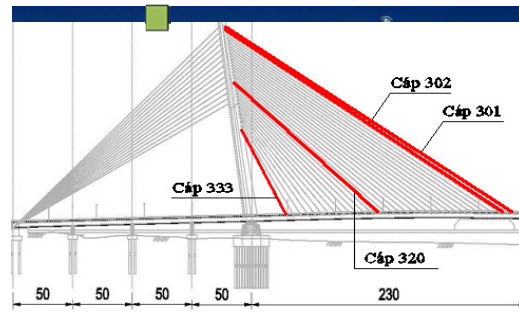


- Mặt phẳng nghiệm số bước sóng cơ bản từ lời giải số chính xác của phương trình (5)
- Mặt phẳng nghiệm số bước sóng cơ bản từ lời giải xấp xỉ của phương trình (7)

**Hình 2.** So sánh nghiệm xấp xỉ và nghiệm chính xác

#### 4. THÍ DỤ XÁC ĐỊNH LỰC CĂNG CÁP CỦA CẦU NGUYỄN VĂN TRỖI – TRẦN THỊ LÝ

Tính chính xác của công thức đề nghị ở trên sẽ được kiểm chứng bằng việc xác định lực căng cáp của cầu ba mặt phẳng dây văng Nguyễn Văn Trỗi – Trần Thị Lý vượt sông Hàn (Đà Nẵng), sử dụng bộ dữ liệu đo dao động cáp tại hiện trường. Nhịp chính cầu dài 230m, mặt cầu rộng 34.5m và trụ tháp cao 134m. Hệ thống cáp căng của cầu bao gồm 63 cáp với chiều dài cáp thay đổi từ 64 m đến 265 m. Trong mỗi tiết diện cáp bao gồm nhiều bó cáp đơn được đặt song song với nhau và đặt trong ống HDPE. Khi xác định mô men quán tính  $I$  của cáp, cần xét đến giá trị độ rỗng (*void ratio*) do những bó cáp đơn không lấp đầy mặt



**Hình 3.** Cầu Nguyễn Văn Trỗi - Trần Thị Lý ở thành phố Đà Nẵng

**Bảng 1.** Đặc trưng cơ học của cáp

Số hiệu cáp	Số bó cáp đơn	Đường kính ống HDPE (mm)	Khối lượng (kg/m)	Tiết diện cáp (mm <sup>2</sup> )	Hệ số rỗng của cáp	$I$ (m <sup>4</sup> )	$E$ (GPa)	$L$ (m)	$\theta$ (°)
301	95	250	129,5	14250	0,625	7,184E-05	200	264,1	26,8
302	88	230	119,9	13200	0,590	5,633E-05		257,6	27,1
320	60	190	81,7	9000	0,590	2,621E-05		142,9	35,6
333	47	180	64,6	7050	0,642	1,843E-05		64,4	57,6

**Bảng 2.** Tần số tự nhiên của sáu dạng dao động đầu tiên

Tên cáp	$f_1$ (Hz)	$f_2$ (Hz)	$f_3$ (Hz)	$f_4$ (Hz)	$f_5$ (Hz)	$f_6$ (Hz)
301	0,4692	0,9193	1,377	1,835	2,3	2,762
302	0,4959	0,9727	1,45	1,942	2,434	2,911
320	1,007	2,014	3,014	4,036	5,066	6,042
333	1,938	3,891	5,875	7,843	9,781	11,78

Với bộ kết quả thí nghiệm đo dao động cáp cầu vào năm 2013, do nhóm nghiên cứu thuộc trường Đại học Giao Thông Vận Tải cung cấp, tác giả đã tiến hành xử lý số liệu độc lập để xác định tần số tự nhiên của 6 dạng dao động của cáp và trình bày trong **Bảng 2**.

Để kiểm chứng, lực căng cáp lần lượt được tính toán theo công thức (8) và theo công thức của

Zui và cộng sự, 1996. Kết quả tính toán lực căng được trình bày trong **Bảng 3**. Kết quả cho thấy trong trường hợp cáp có chiều dài ngắn và trung bình (độ chùng nhỏ), lực căng theo công thức do tác giả đề nghị cho kết quả tương đương so với công thức của Zui và cộng sự. Tuy nhiên, đối với cáp dài (độ chùng lớn), lực căng theo công thức đề nghị cho kết quả tốt hơn so với lực căng theo công thức của Zui và cộng sự.

**Bảng 3.** Kết quả xác định lực căng cáp

Tên cáp	$f_1^*$ (Hz)	$D$ (m)	$\lambda^2$	$\varepsilon$	$H$ theo công thức (8) (kN)	$H$ theo công thức Zui & cộng sự (1996) (kN)	Sai khác (%)
301	0,461	1,287	0,563	2,680E-05	<b>7260</b>	7776	6,64
302	0,487	1,150	0,446	2,249E-05	<b>7200</b>	7663	6,04
320	1,008	0,245	0,050	3,783E-05	<b>6594</b>	6586	0,12
333	1,954	0,043	0,010	2,177E-04	<b>3842</b>	3755	2,32

## 5. KẾT LUẬN

Công thức thực hành xác định lực căng cáp từ các tần số đo được đề nghị trong trường hợp cáp chịu ảnh hưởng đồng thời của độ chùng và độ cứng chống uốn. Công thức này được thiết lập từ nghiệm xấp xỉ ban đầu và điều chỉnh để trùng khớp

với nghiệm chính xác bằng phương pháp bình phương tối thiểu. Tính chính xác của công thức này đã được kiểm chứng với dữ liệu thực tế của cầu Nguyễn Văn Trỗi – Trần Thị Lý ở Đà Nẵng. Công thức thực hành này mang tính phổ quát cao và có hình thức đơn giản, do đó việc áp dụng tính toán trong thực tế rất dễ dàng, tiện lợi.

# Design Formulas for Cable Tension in Cable-stayed Bridges Considering Sag and Bending Rigidity

- **Hoang Nam**

Ho Chi Minh City University of Technology, VNU-HCM

## ABSTRACT

*Estimating cable tension in cable-stayed bridges or in external tendons is essential for regular inspection and assessment of those structures. Vibration measurements provide a solution, however, may not be accurate in cases parameters such as amount of sag and bending rigidity of cable are significant. In this study, the characteristic equation for vibration of the most general case of a cable, where both the sag and*

*flexure in the cable are taken into account, is analytically derived. After that by considering proper simplifying assumptions of small flexural rigidity parameter, asymptotic forms of that equation are obtained. It renders a practically applicable procedure to estimate cable tension using measured natural frequencies. The developed procedure is verified by realistic data of a cable stayed bridge in Vietnam.*

**Keywords:** cables, tension, sag, flexure, natural frequency

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. H.M. Irvine, T.K. Caughey. "The linear theory of free vibrations of a suspended cable," *Proceedings of the Royal Society London, Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 341, pp. 299-315, 1974.
- [2]. H. Zui, T. Shinke và Y. Namita. "Practical formulas for estimation of cable tension by vibration method," *Journal of Structural Engineering, ASCE*, vol. 122, no. 6, pp. 651-656, 1996.
- [3]. N. Hoang, Y. Fujino. "Analytical study on bending effects in a stay cable with a damper," *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, vol. 133, no. 11, pp. 1241-1246, Nov. 2007.
- [4]. Y. Fujino, N. Hoang. "Design formulas for damping of a stay cable with a damper," *Journal of Structural Engineering, ASCE*, vol. 134, iss: 2, pp. 269-278, Feb. 2008.
- [5]. N. Hoang, N.T. Nguyen. "Estimation of cable tension using measured natural frequency," *Procedia Engineering*, vol. 14, pp. 1510-1517, 2011.
- [6]. J. Casa. "A combined method for measuring cable forces: the cable-stayed Alamillo Bridge," *Structural Engineering International*, vol. 4, no. 4, pp. 235-240, 1994.
- [7]. W.X. Ren, G. Chen và W.H. Hu. "Empirical formulas to determine cable tension using fundamental frequency," *International Journal of Structural Engineering and Mechanics*, vol. 20, no. 3, pp.363-380, 2005.
- [8]. C.P. Yu, K.T. Hsu, C.H. Chiang và C.C. Cheng. "Dynamic monitoring of stay cables by enhanced cable equations," *Proc. of SPIE*, vol. 9063, Mar. 2014.
- [9]. A.B. Mehrabi, H. Tabatabai. "Unified finite difference formulation for free vibration of cables," *Journal of Structural Engineering, ASCE*, vol. 124, no. 11, pp. 1313-1322, Nov. 1998.
- [10]. J.N. Gimsing. *Cable supported Bridges*. Second ed., John Wiley & Son, Chichester, 1997.