

## MÔ PHỎNG SỰ LAN TRUYỀN VẾT NỨT TRONG KHÔNG GIAN HAI CHIỀU

Trương Tích Thiện, Trần Kim Bằng

Trường Đại học Bách khoa, ĐHQG-HCM

(Bài nhận ngày 28 tháng 06 năm 2010, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 12 tháng 11 năm 2010)

**TÓM TẮT:** Trong lĩnh vực cơ học nứt, việc dự đoán hướng đi của vết nứt khi xảy ra hiện tượng vết nứt lan truyền đóng vai trò quan trọng vì việc này sẽ đánh giá được vết nứt khi lan truyền liệu có xâm phạm vào những vùng quan trọng, nguy hiểm của cấu trúc hay không. Bài báo cáo này sẽ đề cập tới ba lý thuyết dự đoán hướng lan truyền của vết nứt là thuyết ứng suất pháp theo phương tiếp tuyến cực đại, thuyết suất giải phóng năng lượng cực đại và thuyết mật độ năng lượng biến dạng cực tiểu. Đồng thời, chương trình FRANC2D sẽ được sử dụng để mô phỏng sự lan truyền của vết nứt dựa trên cơ sở các lý thuyết trên.

**Từ khóa:** Cơ học nứt, vết nứt, lan truyền, chương trình FRANC2D.

### 1. GIỚI THIỆU

Hệ số cường độ ứng suất là thông số vô cùng quan trọng trong cơ học nứt, nói lên mức độ tập trung ứng suất tại đỉnh vết nứt. Trong không gian 3 chiều, các hệ số cường độ ứng suất  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ , đặc trưng cho 3 sự chuyển vị độc lập của vết nứt gồm dạng mở rộng (opening – mode I), dạng trượt (sliding – mode II) và dạng xé (tearing – mode III). Khi dự đoán hướng lan truyền của vết nứt hai chiều, 3 phương pháp  $\sigma_{\theta\theta\max}$ ,  $S_{\min}$ ,  $G_{\max}$  đều sử dụng 2 thông số quan trọng chính là  $K_I$  và  $K_{II}$  để tính

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \left( 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta - 2K_{II} \tan \frac{\theta}{2} \right] \quad (1)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] \quad (2)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) \right] \quad (3)$$

Trong đó,  $K_I$ ,  $K_{II}$  là hai hệ số cường độ ứng suất đặc trưng cho hai dạng chuyển vị độc

toán góc uốn của vết nứt. Bài báo này sẽ trình bày cơ sở lý thuyết của các phương pháp này và một số mô hình vết nứt lan truyền đơn giản được tham khảo từ các tài liệu khác.

### 2. PHƯƠNG PHÁP DỰ ĐOÁN HƯỚNG LAN TRUYỀN CỦA VẾT NỨT

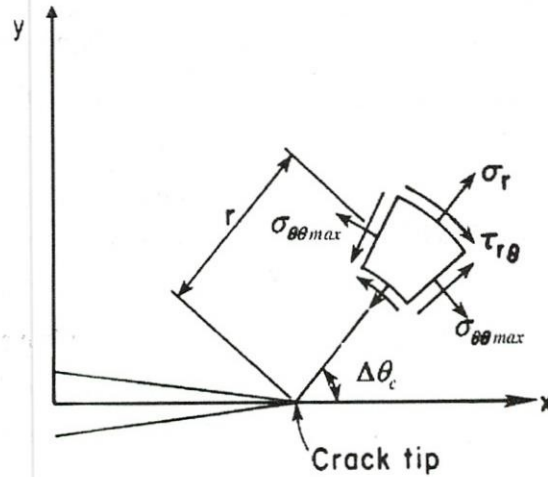
#### 2.1. Thuyết ứng suất pháp theo phương tiếp tuyến cực đại $\sigma_{\theta\theta\max}$

Các biểu thức dạng hỗn hợp của trường ứng suất đàn hồi quanh đỉnh vết nứt khi được biểu diễn theo tọa độ cực như sau

lập của vết nứt là dạng mở rộng (mode I) và dạng trượt (mode II).

Thuyết ứng suất pháp theo phương tiếp tuyến cực đại  $\sigma_{\theta\theta\max}$  bậc nhất đối với vật liệu đẳng hướng khẳng định vết nứt sẽ phát triển

theo hướng vuông góc với ứng suất pháp theo phương tiếp tuyến cực đại. Thuyết này được Sih và Erdogan đưa ra vào năm 1963.



Hình 1. Ứng suất pháp theo phương tiếp tuyến cực đại trong hệ tọa độ cực.

Đạo hàm biểu thức (2) theo biến  $\theta$  và gán bằng 0.

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (4)$$

Sau khi sắp xếp lại và đặt  $\theta = \Delta\theta_c$ , biểu thức (2) sẽ có dạng sau

$$\frac{K_{II}}{K_I} = \frac{-\sin \Delta\theta_c}{3 \cos \Delta\theta_c - 1} \quad (5)$$

Giải phương trình (5) theo biến  $\Delta\theta_c$ , ta sẽ tính được góc uốn của vết nứt.

Theo sự tham khảo từ tài liệu [3], dựa trên thuyết ứng suất pháp theo phương tiếp tuyến cực đại, góc uốn của vết nứt còn có thể được tính từ công thức sau

$$\Delta\theta_c = \arccos \left[ \frac{3K_{II}^2 + \sqrt{K_I^4 + 8K_I^2 K_{II}^2}}{K_I^2 + 9K_{II}^2} \right] \quad (6)$$

Theo công thức (6),  $\Delta\theta_c < 0$  khi  $K_{II} > 0$ .

Ngoài ra, góc uốn của vết nứt còn có thể được tính toán theo công thức được tham khảo từ tài liệu [4] như sau

$$\Delta\theta_c = 2 \arctan \left[ \frac{-2K_{II} / K_I}{1 + \sqrt{1 + 8(K_{II} / K_I)^2}} \right] \quad (7)$$

Theo công thức (7), nếu  $K_{II} = 0$  thì  $\Delta\theta_c = 0$  (dạng mở rộng thuần túy). Nếu  $K_{II} > 0$  thì góc uốn của vết nứt  $\Delta\theta_c < 0$ . Nếu  $K_{II} < 0$  thì góc uốn của vết nứt  $\Delta\theta_c > 0$ .

## 2.2. Thuyết mật độ năng lượng biến dạng cực tiểu $S_{\min}$

Thuyết này được Sih đưa ra vào năm 1974. Sih đã phát triển công thức tính mật độ năng lượng biến dạng  $S$  theo hệ số cường độ ứng suất  $K_I$  và  $K_{II}$  như sau

$$S = a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 \quad (8)$$

Với

$$a_{11} = \frac{1}{16\mu} [(1 + \cos \theta)(\kappa - \cos \theta)] \quad (9)$$

$$a_{12} = \frac{1}{16\mu} \sin \theta [2 \cos \theta - (\kappa - 1)] \quad (10)$$

$$a_{22} = \frac{1}{16\mu} [(\kappa + 1)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1)] \quad (11)$$

E là module đàn hồi và  $\nu$  là hệ số Poisson.

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$\kappa = 3 - 4\nu$  trong trường hợp biến dạng phẳng.

$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$  trong trường hợp ứng suất phẳng.

Vết nứt sẽ phát triển theo hướng  $\theta = \Delta\theta_c$ , nơi mà mật độ năng lượng biến dạng ở đó là cực tiểu.

$$\frac{dS}{d\theta} = 0 \text{ và } \frac{d^2S}{d\theta^2} > 0 \quad (12)$$

Vết nứt bắt đầu lan truyền khi mật độ năng lượng biến dạng tiến tới giá trị cực đại  $S = S_{cr}$ .

Theo sự tham khảo từ tài liệu [5], giá trị cực đại  $S_{cr}$  được tính theo công thức sau

$$S_{cr} = (1 - 2\nu)(1 + \nu)K_{IC}^2 / 2E \quad (13)$$

Với  $K_{IC}$  là giới hạn phá hủy.

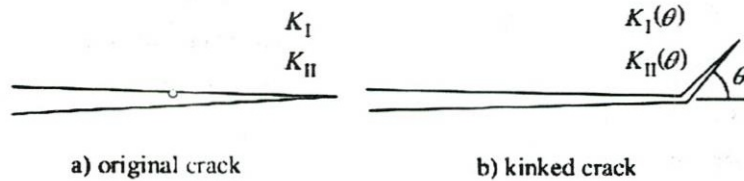
### 2.3. Thuyết suất giải phóng năng lượng cực đại $G_{max}$

Thuyết này dựa trên sự tính toán của Hussain vào năm 1974. Đó là các hệ số cường độ ứng suất  $K_I(\theta)$  và  $K_{II}(\theta)$  của một vết nứt chính ban đầu với một phần bị uốn với góc  $\theta$  rất nhỏ ở đỉnh được tính toán dựa theo các hệ số cường độ ứng suất  $K_I$  và  $K_{II}$  của vết nứt thường.

$$K_I(\theta) = g(\theta) \left( K_I \cos \theta + \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right) \quad (14)$$

$$K_{II}(\theta) = g(\theta) \left( K_{II} \cos \theta - \frac{3}{2} K_I \sin \theta \right) \quad (15)$$

$$g(\theta) = \left( \frac{4}{3 + \cos^2 \theta} \right) \left( \frac{1 - \theta/\pi}{1 + \theta/\pi} \right)^{\frac{\theta}{2\pi}} \quad (16)$$



Hình 2. Vết nứt chính ban đầu với một phần bị uốn với góc  $\theta$ .

Theo biểu thức tổng quát của Irwin, suất giải phóng năng lượng  $G$  cho vết nứt ban đầu với một phần bị uốn với góc  $\theta$  sẽ như sau

$$G(\theta) = \frac{1}{E'} (K_I^2(\theta) + K_{II}^2(\theta)) \quad (17)$$

Với  $E' = \frac{E}{(1-\nu^2)}$  cho biến dạng phẳng.

$E' = E$  cho ứng suất phẳng.

$$G(\theta) = \frac{1}{4E'} g^2(\theta) [(1 + 3 \cos^2 \theta) K_I^2 - 8 \sin \theta \cos \theta K_I K_{II} + (9 - 5 \cos^2 \theta) K_{II}^2] \quad (18)$$

Góc lan truyền của vết nứt được tìm bằng cách cực tiểu hóa  $G(\theta)$ .

$$\frac{\partial G(\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (19)$$

Và phải thỏa mãn điều kiện ổn định sau

$$G(\theta) = \frac{1}{4E'} [A_{11} K_I^2(\theta) + A_{22} K_{II}^2(\theta) + 2A_{12} K_I(\theta) K_{II}(\theta)] \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = g^2(\theta) \begin{bmatrix} 4 - 3 \sin^2 \theta \\ -2 \sin 2\theta \\ 4 + 5 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (22)$$

### 3. SỰ SO SÁNH GIỮA BA PHƯƠNG PHÁP DỰ ĐOÁN HƯỚNG LAN TRUYỀN CỦA VẾT NỨT

Sau đây là đồ thị so sánh kết quả giữa thuyết ứng suất pháp theo phương tiếp tuyến cực đại với thuyết suất giải phóng năng lượng cực đại và thuyết mật độ năng lượng biến dạng

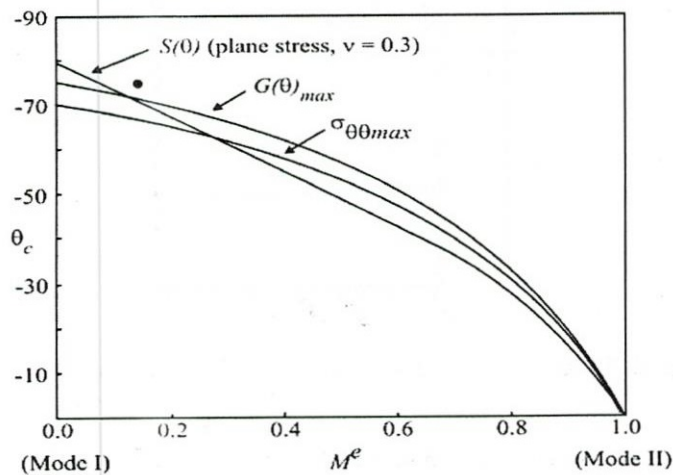
Kết hợp với các biểu thức (14), (15), (16), biểu thức (17) trở thành

$$\frac{\partial^2 G(\theta)}{\partial \theta^2} < 0 \quad (20)$$

Dạng tổng quát của biểu thức (18) có thể được viết gọn lại như sau:

cực tiểu được tham khảo từ tài liệu [7]. Để thuận tiện cho việc so sánh, đặt

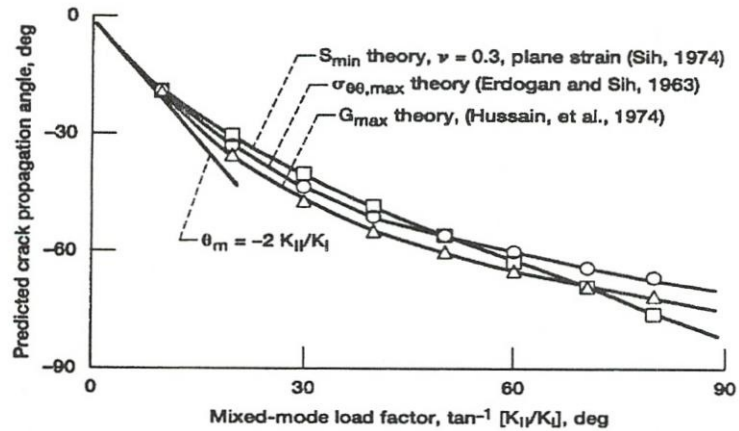
$$M^c = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{K_I}{K_{II}} \right) \quad (23)$$



Hình 3. Đồ thị so sánh kết quả giữa ba lý thuyết dự đoán hướng lan truyền của vết nứt.

Ngoài ra, bài báo cáo này xin được đưa ra một kết quả so sánh khác giữa 3 phương pháp

dự đoán hướng lan truyền của vết nứt. Kết quả này được tham khảo từ tài liệu [2].



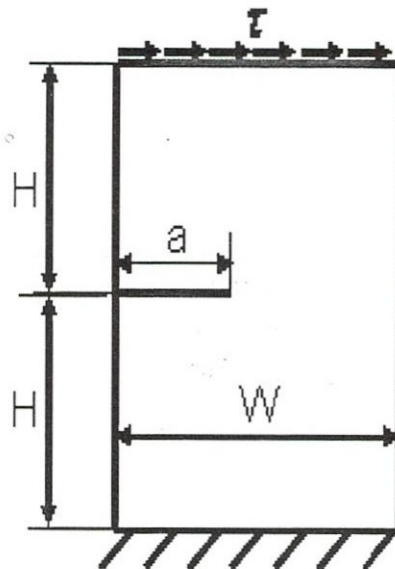
Hình 4. Đồ thị so sánh kết quả giữa ba lý thuyết dự đoán hướng lan truyền của vết nứt.

#### 4. MÔ HÌNH TÍNH TOÁN

##### 4.1 Mô hình 1

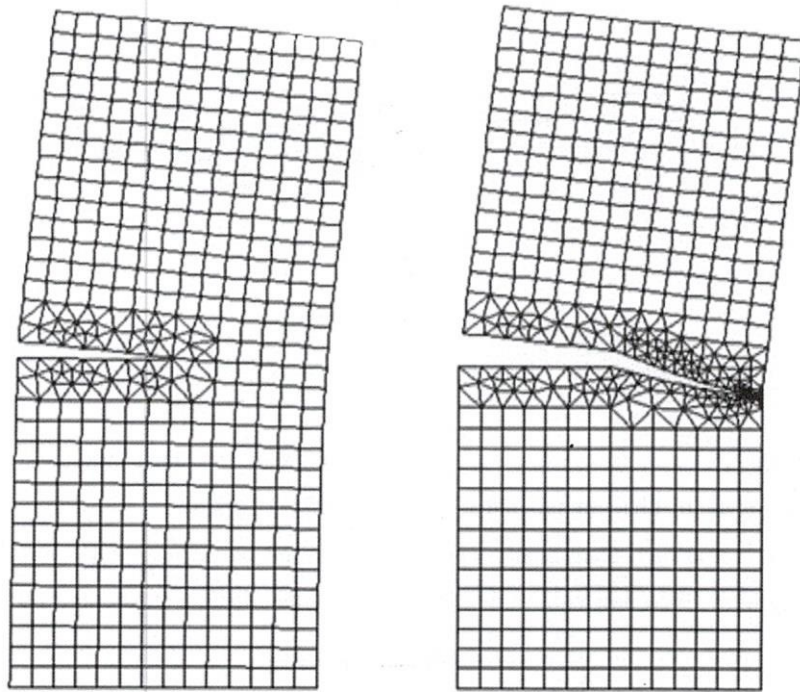
Mô hình được tham khảo trong tài liệu [6] với các kích thước  $W = 7$  (đơn vị dài),  $H = 8$  (đơn vị dài),  $a = 3,5$  (đơn vị dài). Trường hợp

đang xét là biến dạng phẳng. Với  $E = 30$  [(đơn vị lực)<sup>2</sup>/(đơn vị dài)], hệ số Poisson  $\nu = 0,25$ . Ứng suất trượt  $\tau = 1$  (đơn vị áp suất). Độ tăng trường vết nứt  $\Delta a = 0,5$  (đơn vị dài).



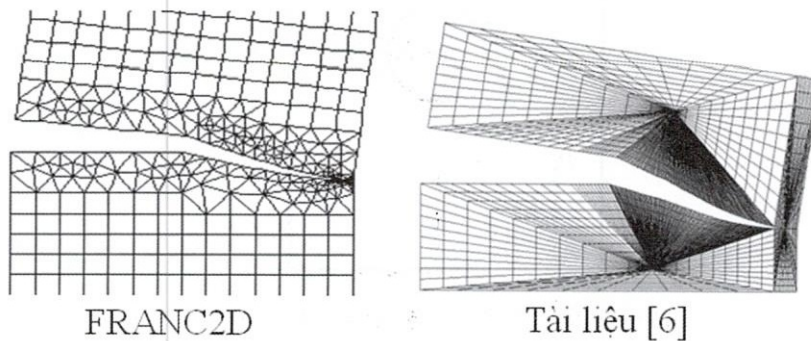
Hình 5. Tấm phẳng với một vết nứt biên và chịu ứng suất tiếp.

Kết quả hình ảnh biến dạng của mô hình sau khi được tính toán bằng FRANC2D như sau



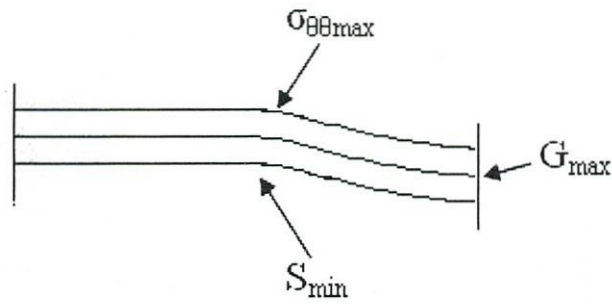
**Hình 6.** Kết quả biến dạng ban đầu và sau khi vết nứt phát triển sau 7 step.

So sánh kết quả biến dạng của mô hình khi vết nứt phát triển sau 7 step với kết quả tham khảo từ tài liệu [6].



**Hình 7.** So sánh kết quả biến dạng.

So sánh kết quả tính toán hướng lan truyền của vết nứt giữa 3 thuyết  $\sigma_{\theta\theta\max}$ ,  $G_{\max}$ ,  $S_{\min}$ .

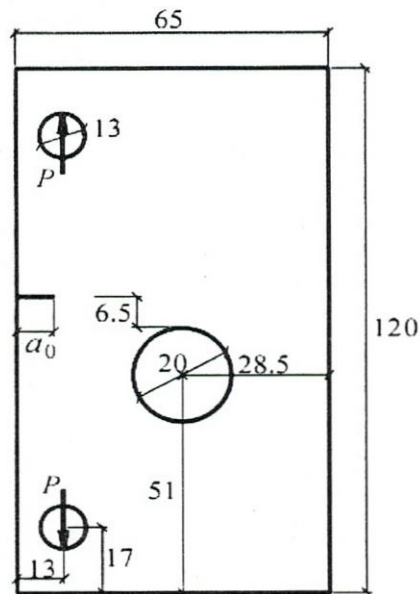


Hình 8. So sánh kết quả vết nứt lan truyền giữa ba thuyết  $\sigma_{\theta\theta max}$ ,  $G_{max}$ ,  $S_{min}$ .

#### 4.2. Mô hình 2

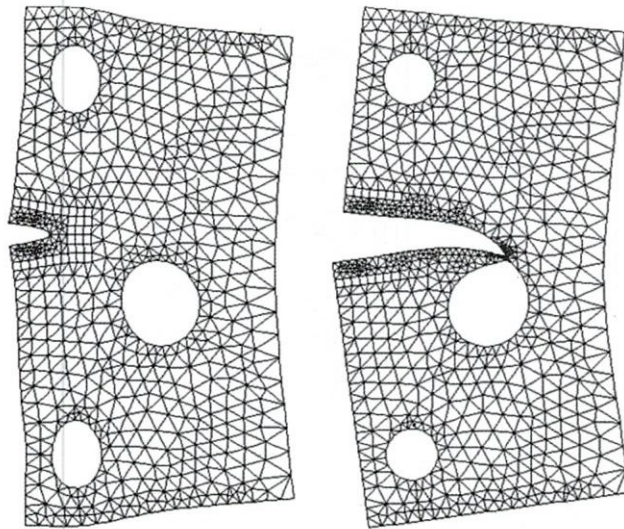
Mô hình được tham khảo từ tài liệu [3]. Trường hợp đang xét là biến dạng phẳng. Các kích thước trong hình vẽ có đơn vị là mm. Vật

liệu đàn hồi đẳng hướng là hợp kim nhôm 7075-T6 với  $E = 71,7 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,33$ . Chiều dài vết nứt ban đầu  $a_0 = 10 \text{ mm}$ . Lực  $P = 20 \text{ KN}$ . Độ tăng trưởng của vết nứt  $\Delta a = 3 \text{ mm}$ .



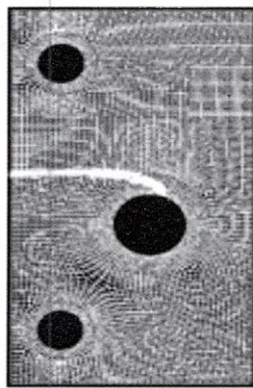
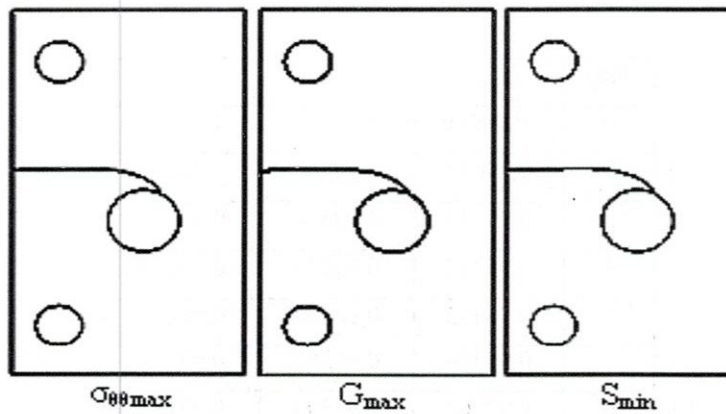
Hình 9. Tấm phẳng với một vết nứt biên và ba lỗ tròn.

Kết quả hình ảnh biến dạng của mô hình sau khi được tính toán bằng FRANC2D như sau

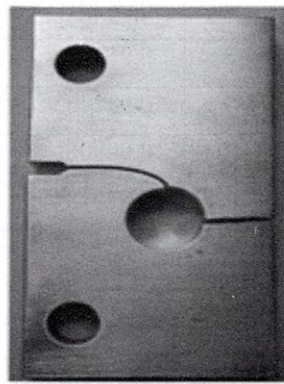


Hình 10. Kết quả biến dạng ban đầu và sau khi vết nứt phát triển sau 11 step.

So sánh kết quả tính toán hướng lan truyền của vết nứt sau 11 step giữa 3 thuyết  $\sigma_{\theta\theta\max}$ ,  $G_{\max}$ ,  $S_{\min}$  và các kết quả tham khảo từ tài liệu [3].



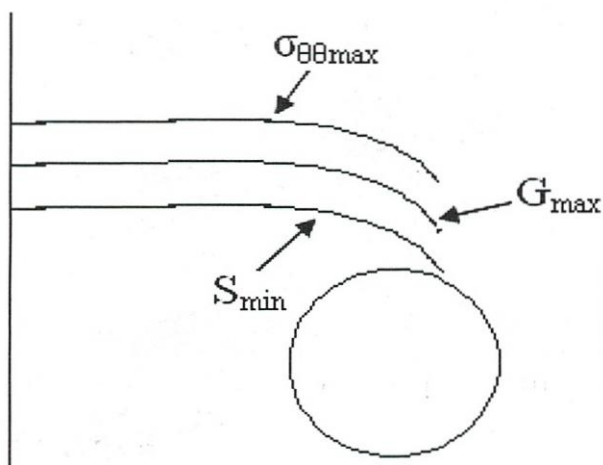
Kết quả tính toán từ tài liệu [3]



Kết quả thí nghiệm từ tài liệu [3]

Hình 11. So sánh kết quả vết nứt lan truyền.



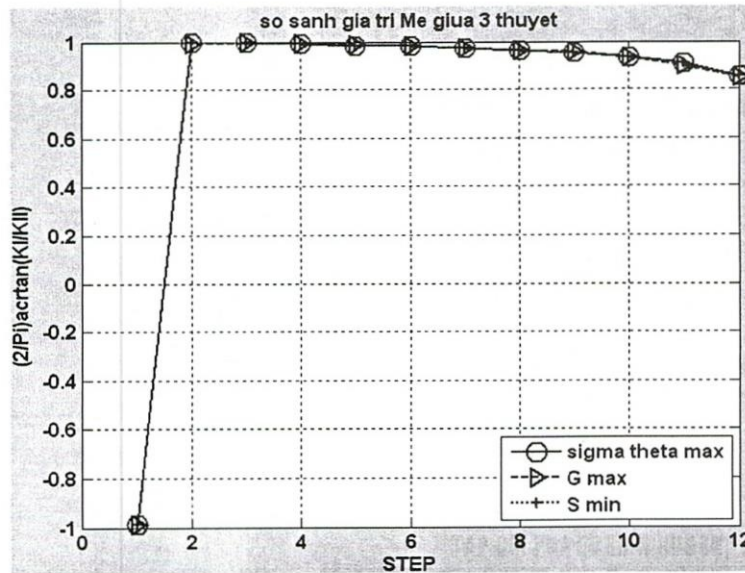


Hình 12. So sánh kết quả vết nứt lan truyền giữa ba thuyết  $\sigma_{\theta\theta\max}$ ,  $G_{\max}$ ,  $S_{\min}$ .

Đặt  $M^e = (2/\pi)\tan^{-1}(K_I/K_{II})$

Bảng 1. So sánh các giá trị  $M^e$  sau 11 step khi tính toán bằng ba phương pháp  $\sigma_{\theta\theta\max}$ ,  $G_{\max}$ ,  $S_{\min}$ .

Step	$\sigma_{\theta\theta\max}$	$G_{\max}$	$S_{\min}$
0	-0,98669	-0,98669	-0,98669
1	0,99632	0,99486	0,99632
2	0,99547	0,99614	0,99547
3	0,99238	0,99275	0,99238
4	0,98495	0,98574	0,98498
5	0,98254	0,98389	0,98254
6	0,97162	0,97303	0,97159
7	0,96291	0,96512	0,96283
8	0,95365	0,95568	0,95365
9	0,93246	0,93511	0,93235
10	0,90906	0,90128	0,90880
11	0,85618	0,85156	0,85633



Hình 13. Đồ thị so sánh các giá trị  $M^e$  sau 11 step khi tính toán bằng ba phương pháp  $\sigma_{\theta\theta\max}$ ,  $G_{\max}$ ,  $S_{\min}$ .

## 5. KẾT LUẬN

Các giá trị  $M^e$  được tính toán ở mỗi step theo 3 thuyết  $\sigma_{\theta\theta\max}$ ,  $G_{\max}$ ,  $S_{\min}$  đều có giá trị xấp xỉ bằng 1 (nằm trong khoảng 0,8 – 1). Do đó, góc uốn của vết nứt được tính theo 3 thuyết  $\sigma_{\theta\theta\max}$ ,  $G_{\max}$ ,  $S_{\min}$  ở mỗi step có giá trị gần bằng

nhau. Điều này phù hợp với đồ thị so sánh kết quả giữa ba lý thuyết dự đoán hướng lan truyền của vết nứt được tham khảo từ tài liệu [7] (Hình 3). Vì vậy, đường đi của vết nứt được mô phỏng theo 3 thuyết  $\sigma_{\theta\theta\max}$ ,  $G_{\max}$ ,  $S_{\min}$  có dạng gần giống nhau.

## SIMULATION OF CRACK PROPAGATION IN TWO DIMENSIONAL PROBLEMS

Truong Tich Thien, Tran Kim Bang

University of Technology, VNU-HCM

**ABSTRACT:** Predicting crack trajectory when crack propagation occurs plays an important role in fracture mechanics problems because this will evaluate whether important areas of structure are heavily influenced by crack propagation. In this paper we introduce three theories to predict crack path, including maximum tangential stress theory, maximum energy release rate theory and minimum strain energy density theory. Besides, the FRANC2D program is used to simulate the crack propagation based on three above theories.

**Keywords:** crack trajectory, crack propagation, FRANC2D program.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Soheil Mohammadi, *Extended Finite Element Method*, Blackwell Publishing, (2008).
- [2]. David G. Lewicki, *Crack Propagation Studies to Determine Benign or Catastrophic Failure Modes for Aerosapcas Thin-Rim Gear*, Army Research Laboratory, Technical Report ARL-TR-971.
- [3]. E. Giner, N. Sukumar, J. E. Tarancon and F. J. Fuenmayor, *An Abaqus implementation of the extended finite element method*, Preprint submitted to Engineering Fracture Mechanics, (2008).
- [4]. N. Sukurmar and J. -H. Prevost, *Modeling Quasi-Static Crack Growth with the Extended Finite Element Method. Part I: Computer Implementation*, International Journal of Solids and Structures, (2003).
- [5]. Ali Hassan CHAHROUR and Masayasu OHTSU, *Simulation of Discrete Cracking in a Concrete Gravity Dam*, Vol. 16, No.2, (1994).
- [6]. Zhenjun Yang, *Fully automatic modelling of mixed – mode crack propagation using scaled boundary finite element method*, Engineering Fracture Mechanics 73, pp. 1711 – 1731, (2006).
- [7]. Ingraffea A. R., *Lecture Notes*, Cornell University, CEE 770, Fall (2007).
- [8]. CFG. *FRANC2D Users Guide – Version 3.1*, (2003).