TÍNH TOÁN NGẪU NHIÊN VỚI QUÁ TRÌNH DẠNG HERMITE

Dương Tôn Đảm
Trường Đại học Công nghệ Thông tin, ĐHQG – HCM
(Bài nhận ngày 20 tháng 01 năm 2008, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 14 tháng 04 năm 2008)

***TÓM TẮT**: Từ khái niệm về quá trình ngẫu nhiên Wiener kết hợp với các đa thức Hermite ta sẽ xây dựng được quá trình ngẫu nhiên dạng Hermite.Điều đặc biệt là chúng sẽ trở thành cơ sở trực giao của không gian các quá trình ngẫu nhiên.Vì vậy trong bài báo này đã tập trung nghiên cứu và nêu được các tính chất đặc thù của vi, tích phân Itô đối với các quá trình ngẫu nhiên dạng Hermite đó.*

1. MỞ ĐẦU

Hàm ngẫu nhiên dạng đa thức Hermite đã được đề cập đến trong các tài liệu của H.McKean [3], Lawrence.C.Evan [4], B.K Oksendan [2] . . . Về mặt lý thuyết chúng có những tính chất lý thú và cũng có những ứng dụng quan trọng. Ta bắt đầu từ những khái niệm cơ bản của giải tích ngẫu nhiên đó là vi và tích phân Itô của các quá trình ngẫu nhiên.

2.KHÁI NIỆM VỀ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN DẠNG HERMITE

2.1.Định Nghĩa 2.1

Đa Thức Hermite bậc n là đa thức xác định bởi

$$H_n(x,t) = \frac{(-t)^n}{n!}\exp\left(\frac{x^2}{2t}\right)\frac{d^n}{dx^n}\left(\exp-\left(\frac{x^2}{2t}\right)\right) \qquad n = 0,1,2,... \tag{1.1}$$

-Theo định nghĩa trên ta có:

$$H_0(x,t) = 1; \quad H_1(x,t) = x; \quad H_2(x,t) = \frac{x^2}{2} - \frac{t}{2}$$

$$H_3(x,t) = \frac{x^3}{6} - \frac{tx}{2}; \quad H_4(x,t) = \frac{x^4}{24} - \frac{tx^2}{4} + \frac{t^2}{8}; \ ...$$

2.2.Định Nghĩa 2.2

Cho W_t là quá trình Wiener tiêu chuẩn một chiều (chuyển động Brown), khi đó quá trình ngẫu nhiên: $H_n\left(W_t,t\right)$ xác định theo (1.1) , được gọi là quá trình ngẫu nhiên dạng Hermite.

Ví dụ: $H_3\left(W_t,t\right) = \dfrac{W_t^3}{6} - \dfrac{tW_t}{2}$

Khái niệm vi, tích phân ngẫu nhiên mà ta xét trong bài này là vi, tích phân Itô, nghĩa là nếu hầu chắc chắn ta có

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha(s,\omega)ds + \int_0^t \beta(s,\omega)dW_t,$$

khi đó ta viết

$$dX_t = \alpha(t,\omega)dt + \beta(t,\omega)dW_t \tag{1.2}$$

Biểu thức (1.2) được gọi là vi phân Itô của X_t, hay ta còn gọi đơn giản là vi phân ngẫu nhiên của X_t.

2.3.Định lý 2.3 (Công thức Itô)

Cho X_t là một quá trình ngẫu nhiên có vi phân Itô dạng (1.2) và $\varphi(x,t): R^2 \to R$ là một hàm hai lần khả vi liên tục theo biến thứ nhất x, một lần khả vi liên tục theo biến thứ hai t. Khi đó quá trình ngẫu nhiên $\varphi(X_t,t)$ có vi phân ngẫu nhiên tính bởi công thức:

$$d\varphi(X_t,t) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(X_t,t)dt + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(X_t,t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(X_t,t)\beta^2(t,\omega)dt \tag{1.3}$$

Công thức (1.3) được gọi là công thức Itô, chứng minh nó trong trường hợp một chiều có thể xem trong [6].

3. MỘT SỐ ĐẶC TÍNH CỦA VI PHÂN NGẪU NHIÊN ĐỐI VỚI QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN DẠNG HERMITE

3.1.Định lý 3.1

Cho $H_n = H_n(W_t,t)$ là quá trình ngẫu nhiên dạng Hermite. Khi đó với m nguyên và lớn hơn 1 ta sẽ có vi phân ngẫu nhiên

$$d(H_n^m) = mH_n^{m-1}dH_n + \frac{m(m-1)}{2}H_n^{m-2}H_{n-1}^2dt \tag{2.1}$$

3.2.Bổ đề 3.2

Đối với quá trình ngẫu nhiên Hermite ta sẽ có

$$dH_n(W_t,t) = H_{n-1}(W_t,t)dW_t \tag{2.2}$$

Chứng minh bổ đề: Trước hết ta có nhận xét,

$$e^{-\frac{x^2}{2t}}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\exp\left(\lambda x - \frac{\lambda^2 t}{2}\right)\right]\Bigg|_{\lambda=0} = \frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\exp\left(-\frac{(x-\lambda t)^2}{2t}\right)\right]\Bigg|_{\lambda=0}$$

$$= (-t)^n\frac{d^n}{dx^n}\left[\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)\right]$$

Suy ra:

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\exp\left(\lambda x-\frac{\lambda^2 t}{2}\right)\right]\Bigg|_{\lambda=0}=e^{\frac{x^2}{2t}}\left(-t\right)^n\frac{d^n}{dx^n}\left[\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)\right]=n!H_n\left(x,t\right)$$

Vậy theo khai triển Taylor đối với hàm $\exp\left(\lambda x-\frac{\lambda^2 t}{2}\right)$ tại $\lambda=0$ ta sẽ có

$$\exp\left(\lambda x-\frac{\lambda^2 t}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x,t).\lambda^n$$

Mặt khác, ta thấy rằng nếu áp dụng công thức Itô cho hàm

$$\phi_t=\exp\left(\lambda W_t-\frac{\lambda^2 t}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n\left(W_t,t\right).\lambda^n \tag{2.3}$$

Ta sẽ có ϕ_t lại là nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$\begin{cases} d\phi_t=\lambda\phi_t dW_t \\ \phi(0)=1 \end{cases} \rightarrow \phi_t=1+\lambda\int_0^t\phi_s dW_s$$

Từ đó ta có

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n H_n=1+\lambda\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n H_n dW_s=1+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_0^t H_{n-1}dW_s$$

$$\Rightarrow H_n\left(W_t,t\right)=\int_0^t H_{n-1}\left(W_s,s\right)dW_s \tag{2.4}$$

Từ (2.4) ta suy ra (2.2).

Chứng minh định lý 2.1

Áp dụng công thức Itô cho hàm $\varphi\left(X_t,t\right)=X_t^m$, với m nguyên, lớn hơn 1 và $X_t\equiv H_n\left(W_t,t\right)$. Khi đó từ (1.3) và (2.2) ta sẽ thu được điều cần chứng minh là biểu thức (2.1).

Ví dụ khi $m=2$ từ (2.1) ta sẽ có

$$d\left(H_n^2\right)=2H_n dH_n+H_{n-1}^2 dt \tag{2.5}$$

Chú ý: Biểu thức (2.5) còn có thể thu được từ nhận xét sau

Nếu X_1 và X_2 có vi phân ngẫu nhiên tương ứng là

$$\begin{cases} dX_1=\alpha_1 dt+\beta_1 dW_t \\ dX_2=\alpha_2 dt+\beta_2 dW_t \end{cases}$$

Khi đó: $d\left(X_1.X_2\right)=X_1dX_2+X_2dX_1+\beta_1\beta_2dt$

Với $X_1\equiv X_2\equiv H_n\left(W_t,t\right)$ sử dụng (2.2) ta sẽ thu được (2.5).

3.3.Hệ quả 3.3

Cho $H_n\left(W_t,t\right)$ là các quá trình ngẫu nhiên dạng Hermite, ta sẽ có

$$\sum_{n=0}^{\infty}H_n\left(W_t,t\right)=e^{-\frac{t}{2}}\exp\left(W_t\right) \tag{2.6}$$

Thật vậy khi sử dụng hệ thức (2.3) với $\lambda=1$ sẽ suy ra được (2.6).

3.4.Định lý 3.4

Cho $H_n\left(W_t,t\right)$; $\forall n=1,2,3...$ là các quá trình ngẫu nhiên dạng Hermite, ta sẽ có:

(i) $$E\left\{H_n\left(W_t,t\right)\right\}=0 \tag{2.7}$$

(ii) $$E\left\{H_n^2\left(W_t,t\right)\right\}=E\left\{\int_0^t H_{n-1}^2\left(W_s,s\right)ds\right\} \tag{2.8}$$

(iii) $$E\left\{\int_0^t H_n\left(W_s,s\right)H_{n-1}\left(W_s,s\right)dW_s\right\}=0 \tag{2.9}$$

Chứng minh định lý 2.4

+ Chứng minh (i) và (ii):

Ta có nhận xét $H_n\left(W_t,t\right)\in L^2\left(o,t\right)$ $n=1,2,3\ldots;\ t>0$ và từ (2.2) ta có:

$$H_n\left(W_t,t\right)=\int_0^t H_{n-1}\left(W_s,s\right)dW_s$$

Trước hết ta chứng minh (i) và (ii) đối với các hàm bước nhảy (step process), $H_{n-1}\left(W_s,s\right)$ và giả định rằng $H_{n-1}\left(W_s,s\right)=H_{n-1}^{(k)}$ khi $s_k\le s<s_{k+1}$; $H_{n-1}^{(k)}$ là $\mathcal{F}\left(s_k\right)$ - đo được và $\mathcal{F}\left(s_k\right)$ độc lập với σ - trường sinh bởi các chuyển động Brown trong tương lai sau thời điểm s_k

(i)=>

$$E\left\{H_n\left(W_t,t\right)\right\}=E\left(\int_0^t H_{n-1}\left(W_s,s\right)dW_s\right)=\sum_{k=0}^{n-1}E\left(H_{n-1}^{(k)}\left(W\left(s_{k+1}\right)-W\left(s_k\right)\right)\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}E\left(H_{n-1}^{(k)}\right)\underbrace{E\left(W\left(s_{k+1}\right)-W\left(s_k\right)\right)}_{=0}=0$$

(ii)=>

$$E\left(\left(\int_0^t H_{n-1}\,dW_s\right)^2\right)=\sum_{k,j=0}^{n-1}E\left\{H_{n-1}^{(k)}H_{n-1}^{(j)}\left(W\left(s_{k+1}\right)-W\left(s_k\right)\right)\left(W\left(s_{j+1}\right)-W\left(s_j\right)\right)\right\}$$

Với $j<k$, khi đó $W\left(s_{k+1}\right)-W\left(s_k\right)$ độc lập với $H_{n-1}^{(k)}H_{n-1}^{(j)}\left(W\left(s_{j+1}\right)-W\left(s_j\right)\right)$

$$E\left\{H_{n-1}^{(k)}H_{n-1}^{(j)}\left(W\left(s_{k+1}\right)-W\left(s_k\right)\right)\left(W\left(s_{j+1}\right)-W\left(s_j\right)\right)\right\}=$$

$$\underbrace{E\left\{H_{n-1}^{(k)}H_{n-1}^{(j)}\left(W\left(s_{j+1}\right)-W\left(s_j\right)\right)\right\}}_{<\infty}\underbrace{E\left(W\left(s_{k+1}\right)-W\left(s_k\right)\right)}_{=0}=0$$

:

Do đó $E\left(\left(\int_0^t H_{n-1}dW_s\right)^2\right)=\sum_{k=0}^{n-1}E\left\{\left(H_{n-1}^{(k)}\right)^2.\left(W\left(s_{k+1}\right)-W\left(s_k\right)\right)^2\right\}=$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}E\left(\left(H_{n-1}^{(k)}\right)^2\right).E\left(\left(W\left(s_{k+1}\right)-W\left(s_k\right)\right)^2\right)=\sum_{k=0}^{n-1}E\left(\left(H_{n-1}^{(k)}\right)^2\right).\left(s_{k+1}-s_k\right)$$

$$=E\left(\int_0^t H_{n-1}^2dt\right)$$

Phần tiếp theo ta xấp xỉ hàm $H_{n-1}\left(W_s,s\right)$ bằng dãy các hàm bước nhảy và sử dụng các kết quả vừa thu được rồi chuyển qua giới hạn theo định nghĩa tích phân Ito, ta sẽ thu được (i) và (ii).

+ Chứng minh (iii):

Từ hệ thức (2.5) ta có

$$H_n^2\left(W_t,t\right)=2\int_0^t H_n\left(W_s,s\right)H_{n-1}\left(W_s,s\right)dW_s+\int_0^t H_{n-1}^2\left(W_s,s\right)ds$$

=>

$$E\left\{H_n^2\left(W_t,t\right)\right\}=2E\left(\int_0^t H_n\left(W_s,s\right)H_{n-1}\left(W_s,s\right)dW_s\right)+E\left(\int_0^t H_{n-1}^2\left(W_s,s\right)ds\right)$$

Từ đó sử dụng (2.8) ta sẽ thu được (2.9).

STOCHASTIC CALCULUS WITH HERMITE TYPE PROCESSES

Duong Ton Dam
University of Information Technology, VNU-HCM

ABSTRACT: *Hermite type stochastic processes are the indespensable core resulting from the well – matched couple of Wiener stochastic process and Hermite polynomials. They will construct an orthogonal base of stochastic processses space. The paper emphatically looks at bona fide nature of Ito integral and stochastic differential equations compared with those of Hermite type stochastic processes.*
Keywords: *Hermite polynomials, Ito integral, Hermite type processes*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. A.Friedman.*Stochastic Differential Equations and Applications Dover Publication*, Inc (2006)

[2]. B.K Oksendan. *Stochastic Differential Equations: and Introduction with Applications*. Springer (1995)

[3]. H.McKean.*Stochastic Integrals*, Academic Press (1969)

[4]. Lawrence C.Evan. *An introduction to Stochastic Differential Equation*s, UC Berkley (2002)

[5]. Dương Tôn Đảm, *Quá trình ngẫu nhiên phần 1: Tích phân ngẫu nhiên và phương trình vi phân ngẫu nhiên.* NXB ĐHQG Tp.HCM (2007)

[6]. A.D.Ventxe, *Giáo trình lý thuyết quá trình ngẫu nhiên*, NXB ĐH và THCN Hà Nội (1987)