VỀ MỘT VÀI ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN ĐỊA PHƯƠNG

Tô Anh Dũng
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG-HCM
(Bài nhận ngày 03 tháng 02 năm 2007)

TÓM TẮT: *Bài báo trình bày một vài định lý về điều kiện cần và đủ của định lý giới hạn địa phương cho dãy các véctơ ngẫu nhiên với phân phối giới hạn bất kỳ và định lý giới hạn địa phương của các hiệu.*

Từ khóa: Định lý giới hạn địa phương, định lý giới hạn địa phương của các hiệu.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Các định lý giới hạn địa phương với điều kiện cần và đủ cho phân phối giới hạn bất kỳ một chiều là một lớp bài toán đóng một vai trò không nhỏ trong lý thuyết xác suất và thống kê toán. Tuy nhiên trong thực tế ngoài các biến ngẫu nhiên một chiều, còn gặp các biến nhiều chiều. Vì vậy mục tiêu của bài báo này là mở rộng các định lý trên cho các không gian hữu hạn chiều. Ngoài ra, bài báo còn xét một dạng định lý giới hạn địa phương khác, đó là định lý giới hạn địa phương của các hiệu trên các không gian nhiều chiều.

Trong bài báo này chúng ta sử dụng một số ký hiệu truyền thống sau:

$\mathbb{Z}$ - Tập hợp các số nguyên

$\mathbb{R}$ - Tập hợp các số thực

$\mathbb{Z}^S$ - Không gian véctơ s-chiều với thành phần là các số nguyên

$\mathbb{R}^S$ - Không gian véctơ s-chiều với thành phần là các số thực

2. ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN ĐỊA PHƯƠNG TRONG KHÔNG GIAN VÉCTƠ S-CHIỀU

2.1 Định lý giới hạn địa phương cổ điển

Trước hết ta đưa ra hai định lý giới hạn địa phương đã được xét trong [4]. Ký hiệu

$S_n = X_1 + \ldots + X_n$ là tổng các biến ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$,

$\Delta_n^1(r) = \sup\limits_{m \in \mathbb{Z}} \left| P(S_n = m + r) - P(S_n = m) \right|$, $r \in \mathbb{Z}$,

$\Delta_n^2(r) = \sup\limits_{r \in \mathbb{R}} \left| p_n(x + r) - p_n(x) \right|$, $p_n(x)$ là hàm mật độ của S_n, $x \in \mathbb{R}$.

Định lý 2.1.1 Giả sử $S_n \in \mathbb{Z}$ và tồn tại dãy $A_n \in \mathbb{R}$ và $b_n \in \mathbb{R}$ ($b_n \to \infty$) sao cho khi $n \to \infty$

$$P\left(\frac{S_n - A_n}{b_n} \le x\right) \to F(x), \tag{1}$$

trong đó $F(x)$ là hàm phân phối với hàm mật độ $p(x)$ liên tục đều trong $\mathbb{R}$. Khi đó để $X_k, k = 1, 2, \ldots$ thỏa định lý giới hạn địa phương, nghĩa là

$$P(S_n = m) = \left(\frac{1}{b_n}\right) p\left(\frac{m - A_n}{b_n}\right) + o\left(\frac{1}{b_n}\right) \quad (2)$$

đều theo $m \in \mathbb{Z}$, điều kiện cần và đủ là $\Delta_n^1(r_n) = o(b_n^{-1})$ với mọi dãy $r_n \in \mathbb{Z}$ mà $|r_n| = o(b_n)$. Định lý sau cho trường hợp liên tục.

Định lí 2.1.2 Giả sử (1) thỏa mãn. Để $X_k, k = 1, 2, \ldots$ thỏa định lý giới hạn địa phương, nghĩa là

$$b_n p_n(A_n + b_n x) \to p(x) \quad (3)$$

đều theo x, điều kiện cần và đủ là từ n nào đó tồn tại hàm mật độ $p_n(x)$ và $\Delta_n^2(v_n) = o(b_n^{-1})$ với mọi dãy $v_n \in \mathbb{R}$ mà $|v_n| = o(b_n)$.

Việc nới rộng hai định lý trên cần các ký hiệu:

$S_n = X_1 + \ldots + X_n$ là tổng các véc tơ ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$,

$\Delta_n^1(r) = \sup\limits_{m \in \mathbb{Z}^S} |P(S_n = m + r) - P(S_n = m)|$, $r \in \mathbb{Z}^S$,

$\Delta_n^2(r) = \sup\limits_{r \in \mathbb{R}^S} |p_n(x + r) - p_n(x)|$, $p_n(x)$ là hàm mật độ của S_n, $x \in \mathbb{R}^S$,

$|x| = \left(\sum_{i=1}^{S} x_i^2\right)^{1/2}$, trong đó $x = (x_1, \ldots, x_S)$.

Định lý 2.1.1' Giả sử $S_n \in \mathbb{Z}^S$ và tồn tại dãy $A_n \in \mathbb{R}^S$ và $b_n \in \mathbb{R}$ ($b_n \to \infty$) sao cho khi $n \to \infty$

$$P\left(\frac{S_n - A_n}{b_n} \le x\right) \to F(x), \quad (1')$$

trong đó $F(x)$ là hàm phân phối với hàm mật độ $p(x)$ liên tục đều trong $\mathbb{R}^S$. Khi đó để X_k, $k = 1, 2, \ldots$ thỏa định lý giới hạn địa phương, nghĩa là

$$P(S_n = m) = \left(\frac{1}{b_n^S}\right) p\left(\frac{m - A_n}{b_n}\right) + o\left(\frac{1}{b_n^S}\right) \quad (2')$$

đều theo $m \in \mathbb{Z}^S$ điều kiện cần và đủ là $\Delta_n^1(r_n) = o(b_n^{-S})$ với mọi dãy $r_n \in \mathbb{Z}^S$ mà $|r_n| = o(b_n)$.

Định lí 2.1.2' Giả sử (1') thỏa mãn. Để X_k, $k = 1, 2, \ldots$ thỏa định lý giới hạn địa phương, nghĩa là

$$b_n^S p_n(A_n + b_n x) \to p(x) \quad (3')$$

đều theo x, điều kiện cần và đủ là từ n nào đó tồn tại hàm mật độ $p_n(x)$ và $\Delta_n^2(v_n) = o(b_n^{-S})$ với mọi dãy $v_n \in \mathbb{R}^S$ mà $|v_n| = o(b_n)$.

2.2.Định lý giới hạn địa phương của các hiệu

Ta ký hiệu

$|\mathbf{V}|$ là định thức của ma trận $\mathbf{V}$,

$f_{X_k}(t)$ là hàm đặc trưng của X_k,

$f_n(t)$ là hàm đặc trưng của S_n.

Định lý 2.2.1 Giả sử $X_k \in \mathbb{Z}^S$ có cùng phân phối với bước cực đại bằng một, có mômen bậc ba hữu hạn và ma trận hiệp phương sai **V** không suy biến, khi đó

$$\Delta_n^1(r,m) = \frac{(\mathbf{V}^{-1}(m-an),r)}{n^{\frac{S+2}{2}}(2\pi)^{\frac{S}{2}}\sqrt{|\mathbf{V}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2n}\left(\mathbf{V}^{-1}(m-an),(m-an)\right)\right\} + \frac{\theta}{n^{\frac{S+2}{2}}} \tag{4}$$

trong đó, $a = E(X_k)$, $|\theta| \le C(F,r) < \infty$, F là phân phối của X_k.

Hệ quả 2.2.1 Giả sử $X_k \in \mathbb{Z}^S$ có cùng phân phối với bước cực đại bằng một với kỳ vọng bằng không, có mômen bậc ba hữu hạn và ma trận hiệp phương sai **V** không suy biến. Khi đó với mọi hằng số r và m

$$\Delta_n^1(r,m) = O\left(n^{-\frac{S+2}{2}}\right) \tag{5}$$

Nhận xét 2.2.1 Biểu thức (5) không đều theo m. Hơn nữa theo (4), tồn tại $C(F, r)$ và m_n sao cho $\Delta_n^1(r,m_n) = C(F,r)n^{-\frac{S+2}{2}}$

Nhận xét 2.2.2 Với điều kiện của định lý 2.2.1 định lý giới hạn địa phương thỏa mãn, thậm chí với một đánh giá của số dư, tuy nhiên để nhận được (4) từ định lý giới hạn địa phương là không thể (cần đòi hỏi tồn tại mômen bậc cao hơn để có được đánh giá số dư tốt hơn).

Định lý sau xét trường hợp liên tục.

Định lý 2.2.2 Giả sử $X_k \in \mathbb{R}^S$ có cùng phân phối và với n_0 nào đó tồn tại hàm mật độ bị chặn $p_{n_0}(x)$, ngoài ra có mômen bậc ba hữu hạn và ma trận hiệp phương sai **V** không suy biến, khi đó

$$\Delta_n^2(r,x) = \frac{(\mathbf{V}^{-1}(x-an),r)}{(2\pi)^{\frac{S}{2}}n^{\frac{S+2}{2}}\sqrt{|\mathbf{V}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2n}\left(\mathbf{V}^{-1}(x-an),(x-an)\right)\right\} + \frac{\theta}{n^{\frac{S+2}{2}}} \tag{6}$$

trong đó, $a = E(X_k)$, $|\theta| \le C(F,r) < \infty$, F là phân phối của X_k.

2.3 Chứng minh

1) Chứng minh định lý 2.1.2' : Ta ký hiệu

$F_n(x)$ – hàm phân phối của S_n ,

$$\varepsilon_n = \sup_{x\in\mathbb{R}^S} \left|F_n(A_n + b_n x) - F(x)\right|,$$

$$\nu_n = (\nu_n^1, ..., \nu_n^S),$$

$$\nu_n^i = \left[\sqrt[2S]{\varepsilon_n}\ b_n\right],\ i = 1,2,...,S$$

$[a,b]$ là hình chữ nhật s-chiều.

Đủ: Từ điều kiện (1') ta có $\varepsilon_n \to 0$, từ đó $|\nu_n| = o(b_n)$. Hơn nữa,

$$(\nu_n^1)^S b_n^S p_n(A_n + b_n x) = b_n^{-S} \int\limits_{u\in[A_n+b_n x,\ A_n+b_n x+\nu_n]} p_n(u)du + b_n^S \int\limits_{u\in[A_n+b_n x,\ A_n+b_n x+\nu_n]} [p_n(A_n + b_n x) - p_n(u)]du =$$

$$= \Delta_{\nu_n^1...\nu_n^1} F(x) + O(\varepsilon_n) + b_n^S(\nu_n^1)^S o(b_n^{-S})$$

$$= (\nu_n^1)^S p(x_n) + O(\varepsilon_n) + (\nu_n^1)^S o(1)$$

ở đây, $x_n \in [x,\ x+\nu_n]$ và $\Delta_{h_1...h_n} F(x)$ là hiệu bậc *k* của $F(x)$ theo các thành phần của véctơ *x* với các số gia $h_1, \ldots, h_n$.

Từ đó, do $p(x)$ liên tục đều, ta có

$$b_n^S p_n(A_n + b_n x) = p(x_n) + o(1) = p(x) + o(1)$$

Nghĩa là ta nhận được (3').

Cần: Giả sử ta có (3'), khi đó

$$\Delta_n^2(\nu_n) = \sup_{x\in\mathbb{R}^S} \left|p_n(\nu_n + x) - p_n(x)\right|$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^S} b_n^{-S} \left|p\left(\frac{x+\nu_n - A_n}{b_n}\right) - p\left(\frac{x - A_n}{b_n}\right)\right| + o(b_n^{-S})$$

$$= o(b_n^{-S})$$

vì $p(x)$ liên tục tuyệt đối và $\dfrac{\nu_n}{b_n} \to 0$. Định lý chứng minh xong. □

2) Chứng minh định lý 2.2.1

Từ công thức biến đổi ta có

$$\Delta_n^1(r,m) = \frac{1}{(2\pi)^S} \int\limits_{\Omega} (e^{-i(m,t)} - e^{-i(m+r,t)}) f_n(t)dt$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^S} \int\limits_{|t|\le\delta} (e^{-i(m,t)} - e^{-i(m+r,t)}) f_n(t)dt +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^S} \int\limits_{\Omega'} (e^{-i(m,t)} - e^{-i(m+r,t)}) f_n(t)dt$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^S}[J_1 + J_2] \tag{7}$$

trong đó,

$$\Omega \ = \{ t = (t_1, ..., t_S) : |t_i| \le \delta \ , \ i = 1, ..., s \}$$

$$\Omega' \ = \{ t = (t_1, ..., t_S) : |t_i| \le \delta \ , \ i = 1, ..., s \ ; |t| > \delta \ \}$$

Vì ma trận $\mathbf{V}$ xác định dương nên có thể chọn δ sao cho cầu $\{|t| \le \delta\}$ nằm trong elipxoid:

$$\left\{ t \in \mathbb{R}^S : (\mathbf{V}t, t)^{1/2} \le \sup_{|t|=1} \frac{[E(t, X_k - a)^2]^{3/2}}{E|(t, X_k - a)|^3} \right\}$$

Và với δ đó, sử dụng định lý 8.4 của [2] ta nhận được

$$J_1 = \int_{|t| \le \delta} (e^{-i(m,t)} - e^{-i(m+r,t)}) e^{-(an,t) - \frac{n}{2}(\mathbf{V}t,t)} \, dt \, +$$

$$+ \int_{|t| \le \delta} (e^{-i(m,t)} - e^{-i(m+r,t)}) \, \theta \, \ell_{3,n} \, n^{3/2} (\mathbf{V}t, t)^{3/2} e^{-Cn(\mathbf{V}t,t)} \, dt$$

$$= J_{11} + J_{12} \tag{8}$$

trong đó, $\ell_{j,n}$ là phân số Liapunov:

$$\ell_{j,n} = \sup_{|t|=1} \frac{n^{-1} \sum_{k=1}^{n} E\left(|(t, X_k - a)|^j\right)}{\left[n^{-1} \sum_{k=1}^{n} E(t, X_k - a)^2 \right]^{j/2}} \times n^{-(j-2)/2} \quad , (j \ge 2)$$

Ta có

$$J_{11} = \int_{\mathbb{R}^S} (e^{-i(m,t)} - e^{-i(m+r,t)}) e^{-(an,t) - \frac{n}{2}(\mathbf{V}t,t)} \, dt \, -$$

$$- \int_{|t| > \delta} (e^{-i(m,t)} - e^{-i(m+r,t)}) e^{-(an,t) - \frac{n}{2}(\mathbf{V}t,t)} \, dt = J'_{11} + J''_{11} \tag{9}$$

Theo công thức biến đổi ta có

$$J'_{11} = \frac{(2\pi)^{S/2}}{n^{S/2}\sqrt{|\mathbf{V}|}} \left(e^{-\frac{1}{2n}\left(\mathbf{V}^{-1}(m-an), (m-an)\right)} - e^{-\frac{1}{2n}\left(\mathbf{V}^{-1}(m+r-an), (m+r-an)\right)} \right)$$

Từ đó, sử dụng khai triển Taylor tại điểm m, nhận được

$$J'_{11} = \frac{\left(\mathbf{V}^{-1}(m-an),\, r\right)}{n^{\frac{S+2}{2}}(2\pi)^{S/2}\sqrt{|\mathbf{V}|}}\, e^{-\frac{1}{2n}\left(\mathbf{V}^{-1}(m-an),\,(m-an)\right)} + O\left(n^{-\frac{S+2}{2}}\right) \tag{10}$$

Tiếp theo,

$$\left|J''_{11}\right| \le C \int_{|t|>\delta} e^{-\frac{n}{2}(\mathbf{V}t,t)}\, dt = C\, e^{-\frac{n}{4}(\mathbf{V}t',t')} \int_{|t|>\delta} e^{-\frac{n}{4}(\mathbf{V}t,t)}\, dt$$

trong đó, $t' \in \left\{ t \in \mathbb{R}^S : |t| > \delta \right\}$ và $C = C(F)$.

Chú ý rằng, nếu α_* là giá trị riêng nhỏ nhất của ma trận $\mathbf{V}$, thì giá trị nhỏ nhất của dạng toàn phương $(\mathbf{V}t,\, t)$ với điều kiện $|t| = \delta$ sẽ là $\delta\alpha_* \neq 0$. Vì vậy

$$\left|J''_{11}\right| \le C\, e^{-\frac{n}{4}\delta\alpha_*} \int_{\mathbb{R}^S} e^{-\frac{n}{4}(\mathbf{V}t,t)}\, dt = \frac{C\, 2^S e^{-\frac{n}{4}\delta\alpha_*}}{n^{S/2}} \int_{\mathbb{R}^S} e^{-(\mathbf{V}t,t)}\, dt$$

Do $\mathbf{V}$ đối xứng, không suy biến nên tồn tại ma trận $\mathbf{Q}$ sao cho $\mathbf{Q}'\mathbf{V}\mathbf{Q} = \mathbf{K}$, trong đó $\mathbf{K}$ là ma trận đường chéo, tạo thành từ các giá trị riêng α_i của ma trận $\mathbf{V}$. Để tính tích phân cuối cùng, ta đổi biến với $t = Cx$:

$$\int_{\mathbb{R}^S} e^{-(\mathbf{V}t,t)}\, dt = \prod_{i=1}^{S} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha_i x_i^2}\, dx_i = \frac{\pi^{S/2}}{\sqrt{\alpha_1 \dots \alpha_S}} = \frac{\pi^{S/2}}{\sqrt{|\mathbf{V}|}}$$

trong đó $x = (x_1, \dots, x_S)$.

Như vậy,

$$\left|J''_{11}\right| \le \frac{C\, e^{-Cn}}{n^{S/2}}$$

và từ đó nhận được

$$J''_{11} = o\left(n^{-\frac{S+2}{2}}\right) \tag{11}$$

Bây giờ ta đánh giá J_{12}

$$\left|J_{12}\right| = \int_{|t|\le\delta} \left|e^{-i(m,t)} - e^{-i(m+r,t)}\right| \left|\theta\right|\ \ell_{3,n}\, n^{3/2} \left|(\mathbf{V}t,t)^{3/2}\right| \left|e^{-Cn(\mathbf{V}t,t)}\right| dt \le$$

$$\le C \int_{\mathbb{R}^S} \left|(r,\, t)\right| \frac{|\theta|\, n^{3/2}}{n^{1/2}} (\mathbf{V}t,t)^{3/2}\, e^{-Cn(\mathbf{V}t,t)}\, dt =$$

$$= \frac{C|\theta|}{n^{\frac{S+2}{2}}} \int_{\mathbb{R}^S} |(r,\, u)| \, (\mathbf{V}u, u)^{3/2} \, e^{-C(\mathbf{V}u,u)} \, du \leq$$

$$\leq \frac{C|\theta|}{n^{\frac{S+2}{2}}} \int_{\mathbb{R}^S} |r| \, |u| \, (\mathbf{V}u, u)^{3/2} \, e^{-C\alpha_* |u|^2} du \leq$$

$$\leq \frac{C|\theta|}{n^{\frac{S+2}{2}}} \int_{\mathbb{R}^S} |r| \, \alpha^* \, |u|^4 \, e^{-C\alpha_* |u|^2} du \leq$$

$$\leq \frac{C(F,r)}{n^{\frac{S+2}{2}}} \tag{12}$$

trong đó α^* là giá trị riêng lớn nhất của ma trận $\mathbf{V}$.

Cuối cùng

$$|J_2| \leq C \int_{\Omega'} |f_n(t)| dt$$

Vì X_1 là véctơ ngẫu nhiên với thành phần nguyên với bước cực đại bằng một nên

$$|f(t)| < 1 \,,\; t \in \Omega'$$

ở đây $f(t)$ hàm đặc trưng của X_1. Do vậy

$$\sup_{t\in\Omega'} |f_n(t)| = a^n \,,\;\; a = a(F,\delta) < 1$$

Từ đó nhận được $|J_2| \leq (2\pi)^S \, a^S$. Như vậy

$$J_2 = o\left(n^{-\frac{S+2}{2}}\right) \tag{13}$$

Còn lại, thay (10), (11) vào (9) ; thay (9), (12) vào (8). Và từ (8), (13) và (7) suy ra (4). Định lý 2.2.1 được chứng minh xong. □

3) Chứng minh hệ quả 2.2.1

Theo định lý 2.2.1, do $a = 0$ ta có

$$\Delta_n^1(r,m) = \frac{(\mathbf{V}^{-1}m, r)}{n^{\frac{S+2}{2}} (2\pi)^{\frac{S}{2}} \sqrt{|\mathbf{V}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2n}\left(\mathbf{V}^{-1}m, m\right)\right\} + \frac{\theta}{n^{\frac{S+2}{2}}} = O\left(n^{-\frac{S+2}{2}}\right)$$

Chứng minh xong. □

4) Chứng minh định lý 2.2.2

Từ điều kiện bị chặn của hàm mật độ $p_{n_0}(x)$ suy ra hàm đặc trưng $f_{n_0}(t)$ khả tích tuyệt đối, nghĩa là có công thức biến đổi cho $n \geq 2n_0$. Vì vậy,

$$\Delta_n^2(r,x) = \frac{1}{(2\pi)^S} \int (e^{-i(x,t)} - e^{-i(x+r,t)}) \, f_n(x) \, dt$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^S}\left[\int_{|t|\le\delta}(e^{-(x,t)} - e^{-i(x+r,t)})f_n(t)\,dt + \int_{|t|>\delta}(e^{-i(x,t)} - e^{-i(x+r,t)})f_n(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^S}[J_1 + J_2] \tag{14}$$

trong đó, δ được xác định trong chứng minh định lý 2.2.1 và tương tự ta nhận được

$$J_1 = \frac{(\mathbf{V}^{-1}(x-an),r)}{(2\pi)^{\frac{S}{2}} n^{\frac{S+2}{2}}\sqrt{|\mathbf{V}|}}\exp\left\{-\frac{1}{2n}\left(\mathbf{V}^{-1}(x-an),(x-an)\right)\right\} + \frac{\theta}{n^{\frac{S+2}{2}}} \tag{15}$$

ở đây $|\theta| \le C(F,r) < \infty$.

Ta xét J_2

$$J_2 \le C\int_{|t|>\delta}|f_n(t)|\,dt = C\left[\int_{\delta<|t|\le H}|f_n(t)|\,dt + \int_{|t|>H}|f_n(t)|\,dt\right] = C[I_1 + I_2] \tag{16}$$

Ta có $I_1 = \prod_{k=2n+1}^{n}|f_{X_k}(t')| \int_{\delta<|t|\le H}|f_{2n_1}(t)|\,dt$, trong đó $t \in \{t \in \mathbb{R}^S : \delta < |t| \le H\}$. Theo bổ đề 2 [3]

$$\prod_{k=2n_1+1}^{n}|f_{X_k}(t')| \le \exp\left\{-2(n-2n_1)\inf_{\frac{\delta}{2\pi}\le|d|\le\frac{H}{2\pi}}\Lambda(X_1,d)\right\}$$

$$\int_{\delta<|t|\le H}|f_{2n_1}(t)|\,dt = C_1(F,\delta,H) < \infty$$

và

$$\inf_{\frac{\delta}{2\pi}\le|d|\le\frac{H}{2\pi}}\Lambda(X_1,d) \ge C' > 0$$

trong đó $\Lambda(X_1,d) = \inf_{a\in\mathbb{R}^S}\int_{\mathbb{R}^S} < (x-a,d>^2 P_k(dx)$, $d \in \mathbb{R}^S$ (xem [5]). Và $<\alpha>$ là khoảng cách từ số nguyên gần nhất đến α.

Vì vậy $I_1 \le C_1\exp\{-2(n-2n_1)C'\}$ hay

$$I_1 = o\left(n^{-\frac{S+2}{2}}\right) \tag{17}$$

Tiếp theo ta có

$$I_2 = \prod_{k=2n_1+1}^{n}|f_{X_k}(t'')| \int_{|t|\ge H}|f_{2n_1}(t)|\,dt$$

trong đó $t'' \in \{t \in \mathbb{R}^S : |t| \ge H\}$. Và

$$\prod_{k=2n_1+1}^{n} \left| f_{X_k}(t'') \right| \leq \exp\left\{ -2(n-2n_1) \inf_{|d| \geq H/2\pi} \Lambda(X_1, d) \right\}$$

$$\inf_{|d| \geq \frac{H}{2\pi}} \Lambda(X_1, d) \geq C'' \text{ (với H nào đó đủ lớn)}$$

Vậy

$$I_2 = o\left(n^{-\frac{S+2}{2}} \right) \qquad (18)$$

Cuối cùng, từ (14) – (18) suy ra (6). Định lý 2.2.2 được chứng minh xong. □

3. KẾT LUẬN

Bài báo có thể phát triển theo một số hướng sau:

- Nới rộng các định lí trên ra trường hợp vô hạn chiều.
- Xem xét ứng dụng các định lí trên trong các mô hình thống kê phi tuyến.

ON SOME LOCAL LIMIT THEOREMS

To Anh Dung
University of natural sciences, VNU-HCM

ABSTRACT: *In this paper, the theorems of necessary and sufficient conditions of local limit theorem for random vectors with any limit distribution and local limit theorems of differences are considered .*

Key words: Local limit theorem, local limit theorem of differences.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Kesten H. *Sum of independent random variables – without moment condition.* – Ann. Math. Stat., Vol. 42, No 3, p. 701-703, (1972).

[2]. Бхаттачария Р.Н., Ранга Рао Р. *Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения.* Наука, (1982).

[3]. А. Б. *Локальные предельные теоремы для плотностей сумм независимых векторов* . – Изв. АН УзССР, Серия физ. мат. наук. No 5, С. 25-29, (1983).

[4]. Мухин А. Б. *О некоторых необходимых и достаточных условиях локальных предельных теорем.* – Докл. АН УзССР, No 8, С 7-8, (1984).

[5]. То Ань Зунг. *Сглаживание распределений при суммировании и локальные предельные теоремы.* – Изв. АН УзССР, Серия физ. мат. наук, No 2, С. 44-51, (1986).

[6]. Tô Anh Dũng, Ung Ngọc Quang. *Về một định lí giới hạn địa phương trong không gian các ma trận.* Hội nghị khoa học trường Đại Học Khoa học Tự nhiên TPHCM, (1993).