

# GIẢI SỐ BÀI TOÁN ĐÀN-DẼO MỘT CHIỀU BẰNG GIẢI THUẬT “RETURN-MAPPING”

Nguyễn Thời Trung<sup>(1)</sup>, Ngô Thành Phong<sup>(1)</sup>, Nguyễn Phú Vinh<sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup> Khoa Toán - Tin, Trường ĐH Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh

<sup>(2)</sup> Khoa CNTT, Trường Cao Đẳng Công nghiệp IV – Tp. Hồ Chí Minh

(Bài nhận ngày 31 tháng 7 năm 2003, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 18 tháng 9 năm 2003)

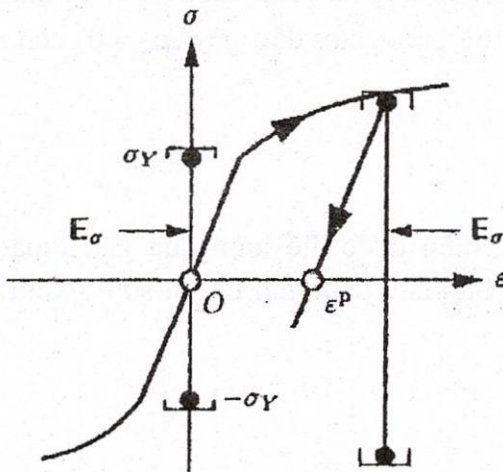
**TÓM TẮT:** Bài báo trình bày mô hình và giải thuật số “return-mapping” cho bài toán đàn-dẻo tái bền đẳng hướng một chiều. Mô hình và giải thuật được áp dụng để giải số bài toán 3 thanh dàn chịu kéo, nén.

## 1. Giới thiệu

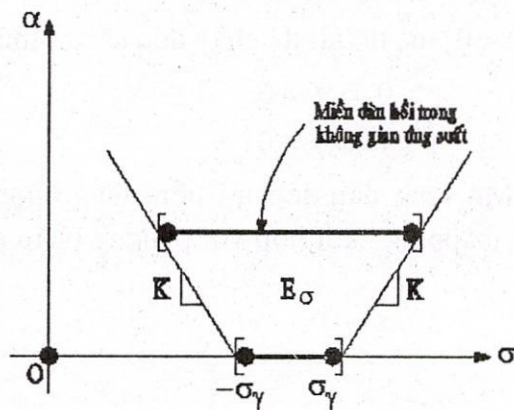
Việc tính toán thiết kế với mô hình đàn-dẻo sẽ giúp ta tận dụng được khả năng làm việc của vật liệu, giảm giá thành công trình.

Trong mô hình đàn-dẻo tái bền đẳng hướng, miền đàn hồi trong không gian ứng suất sẽ được mở rộng theo cả hai phía kéo, nén một khi ứng xử của vật liệu nằm trong giai đoạn tái bền đẳng hướng (hình 1 & 2) [3][4].

Ta có thể ứng dụng trong công nghệ sản xuất vật liệu để tăng mô đun đàn hồi bằng cách làm cho vật liệu chảy dẻo trước đến một ứng suất mong muốn.



Hình 1 : Quan hệ ứng suất-biến dạng trong tái bền đẳng hướng



Hình 2 : Miền đàn hồi trong không gian ứng suất được mở rộng sau khi chảy dẻo

## 2. Mô hình đàn-dẻo tái bền đẳng hướng một chiều [3]

a. Quan hệ ứng suất – biến dạng đàn hồi

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad \text{với} \quad \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

Trong đó

- $\sigma$  : Ứng suất đàn hồi
- $E$  : Mô đun đàn hồi
- $\varepsilon$  : Biến dạng tổng
- $\varepsilon^p$  : Biến dạng dẻo
- $\varepsilon^e$  : Biến dạng đàn hồi

b. Luật chảy dẻo và luật tái bền đẳng hướng

$$\dot{\epsilon}^p = \gamma \text{sign}(\sigma)$$

$$\dot{\alpha} = \gamma = |\dot{\epsilon}^p|$$

Trong đó  $\gamma$ : Hệ số trượt  $\geq 0$

$\alpha$ : Biến tái bền trong  $\geq 0$

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{khi } \sigma > 0 \\ -1 & \text{khi } \sigma < 0 \end{cases}$$

c. Điều kiện chảy dẻo

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - (\sigma_y + K\alpha) \leq 0$$

Trong đó  $K$ : Mô đun chảy dẻo

$\sigma_y$ : Ứng suất chảy dẻo ban đầu của vật liệu

d. Điều kiện kết hợp Kuhn-Tucker

$$\gamma \geq 0, \quad f(\sigma, \alpha) \leq 0, \quad \gamma f(\sigma, \alpha) = 0$$

Điều kiện này nhằm đảm bảo ứng suất luôn nằm trong giới hạn cho phép và chảy dẻo chỉ có thể xảy ra trên bề mặt chảy dẻo.

$$\begin{cases} f(\sigma, \alpha) < 0 \Rightarrow \gamma = 0 \\ \gamma > 0 \Rightarrow f(\sigma, \alpha) = 0 \end{cases}$$

e. Điều kiện tương thích

$$\gamma \dot{f}(\sigma, \alpha) = 0 \quad \text{nếu} \quad \dot{f}(\sigma, \alpha) = 0$$

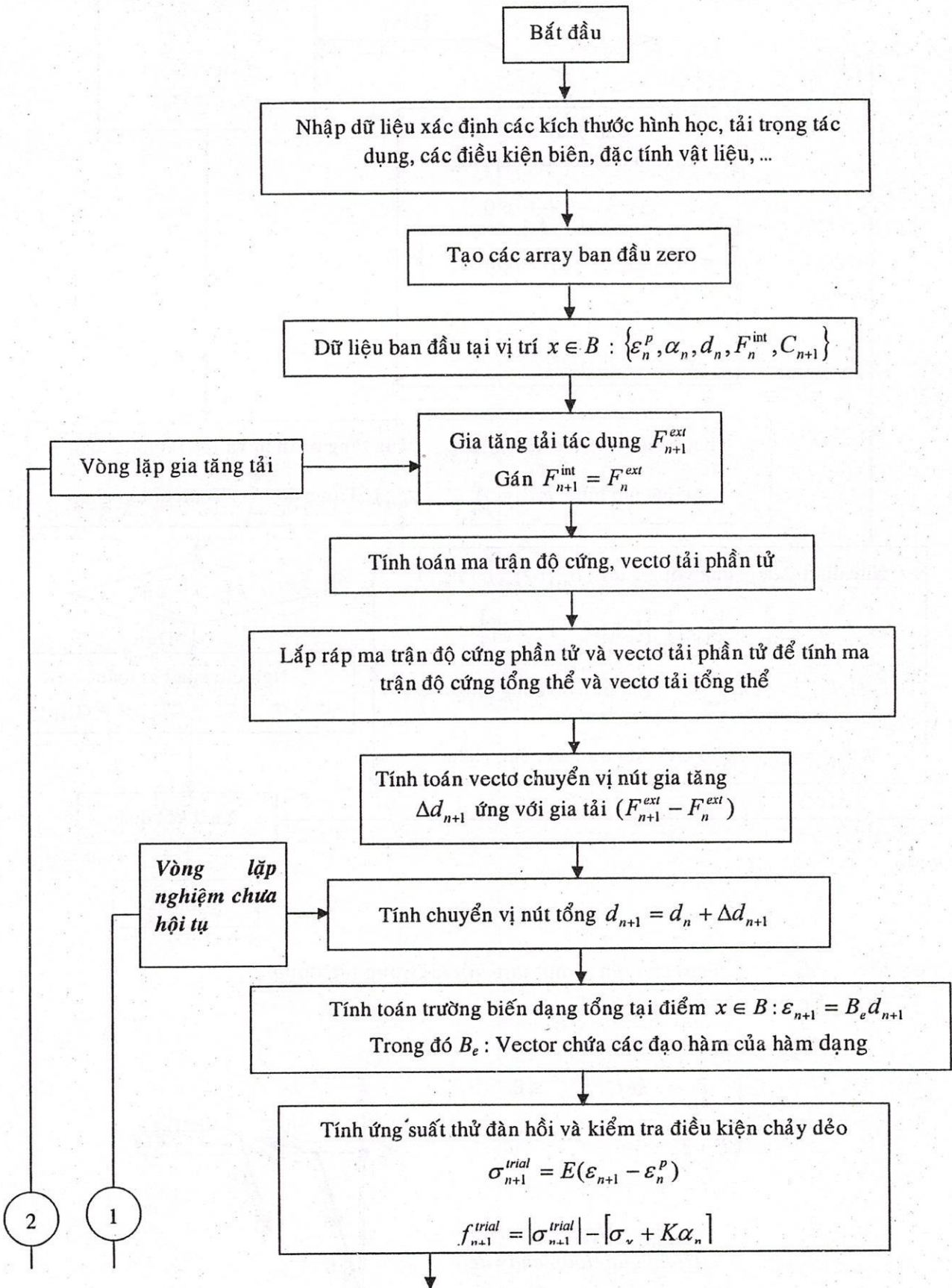
Điều kiện này cho ta thấy khi ứng suất đã đạt đến trạng thái chảy dẻo thì chảy dẻo chỉ có thể tiếp tục xảy ra khi ứng suất tiếp tục duy trì trên biên chảy dẻo  $\dot{f}(\sigma, \alpha) = 0$ , còn nếu  $\dot{f}(\sigma, \alpha) < 0$ , tức dỡ tải thì chảy dẻo sẽ kết thúc.

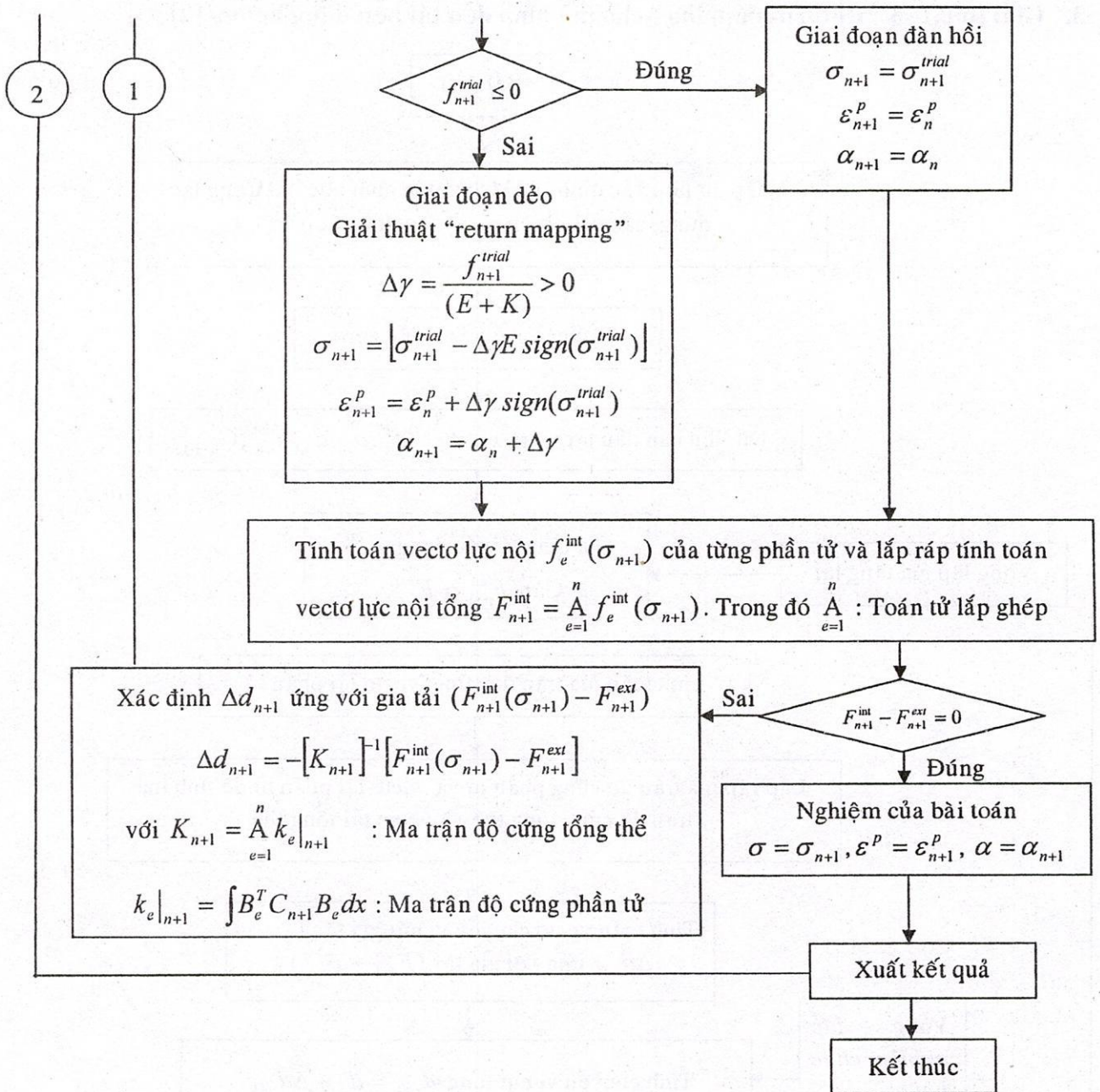
$$\begin{cases} \dot{f} > 0 \Rightarrow \dot{\gamma} = 0 \\ \dot{f} < 0 \Rightarrow \dot{\gamma} = 0 \end{cases}$$

Mô hình đàn-dẻo tái bền đẳng hướng một chiều được thể hiện qua giải thuật số "return-mapping" kết hợp với phương pháp phần tử hữu hạn được mô tả bởi sơ đồ khối sau đây.



## 3. Giải thuật số "Return-mapping" cho mô hình dẻo tái bền đẳng hướng [2],[3]





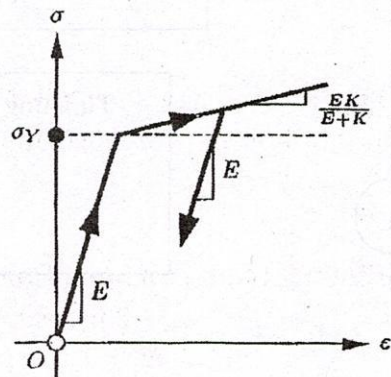
Trong đó :  $d_n$  : vectơ chuyển vị nút ứng với tải trọng tác dụng  $F_n^{ext}$

$F_n^{int}$  : vectơ lực nội tổng

$C_{n+1}$  : mô đun đàn-dẻo

$$C_{n+1} = \begin{cases} E & \text{khi } f_{n+1}^{trial} \leq 0 \\ \frac{EK}{E+K} & \text{khi } f_{n+1}^{trial} > 0 \end{cases}$$

Hình 3 : Mô đun đàn dẻo trong giai đoạn chảy dẻo và giai đoạn đàn hồi





**4. Giải số bài toán 3 thanh**

Xét trường hợp ba thanh dàn đồng quy, cùng làm bằng một loại vật liệu có giới hạn chảy  $\sigma_y$ , có mặt cắt ngang  $F$  chịu tải tác dụng của lực  $P$  như hình 4. Góc  $\theta = 30^\circ$ . Chiều dài thanh giữa  $L = 1$  m.

- Các số liệu của bài toán:

Mô đun đàn hồi:

$$E_1 = E_2 = E_3 = E = 2.10^{11} \text{ (N/m}^2\text{)}$$

Diện tích các thanh:

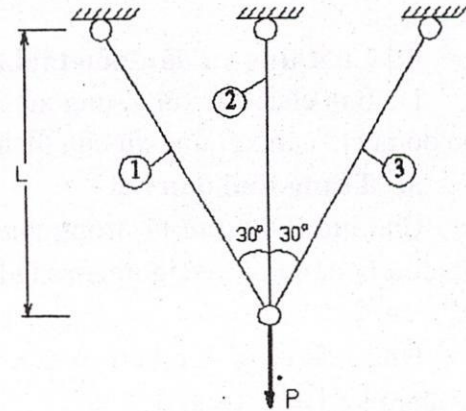
$$F_1 = F_2 = F_3 = F = 2.5.10^{-3} \text{ (m}^2\text{)}$$

Mô đun chảy dẻo:

$$K_1 = K_2 = K_3 = K = 0.2E \text{ (N/m}^2\text{)}$$

Giới hạn đàn hồi (ngưỡng chảy dẻo):

$$[\sigma_{\gamma 1}] = [\sigma_{\gamma 2}] = [\sigma_{\gamma 3}] = \sigma_y = 16.10^7 \text{ (N/m}^2\text{)}$$



Hình 4 : Hệ dàn 3 thanh

**4.1 Các phương trình không thứ nguyên [1][5]**

**Ứng xử đàn-dẻo của thanh chịu kéo đúng tâm**

Tăng  $P$  từ từ để không xảy ra hiện tượng động, ta phân biệt 3 trường hợp sau:

- Nếu  $\sigma < \sigma_p$  : vật liệu làm việc trong giai đoạn đàn hồi
- Nếu  $\sigma \geq \sigma_p$  và  $\epsilon_p \neq 0$  : vật liệu ở giai đoạn dẻo tái bền đẳng hướng ứng với trường hợp gia tải
- Nếu  $\sigma = \sigma_p$  và  $\epsilon_p = 0$  : Trường hợp cắt tải

Trong đó:  $\sigma_p$ : ứng suất chảy dẻo hiện thời của vật liệu.

**Điều kiện tương thích**

Điều kiện này diễn tả mối quan hệ tồn tại giữa các biến dạng của các thanh, cụ thể trong trường hợp này là của các thanh 1 và 2.

Do tính chất đối xứng của bài toán, sau khi biến dạng, điểm đặt lực  $O$  di chuyển đến vị trí mới  $O'$  trên phương thẳng đứng  $OB$ . Nối  $O'A$  và  $O'B$  ta lần lượt được các vị trí của các thanh 1 và 2 sau khi biến dạng.

Hạ  $OA'$  vuông góc  $O'A$ , ta được:

$$\overline{OO'} = \Delta_2 ; \overline{O'A'} = \Delta_1, \overline{O'A'} = \overline{OO'} \cos \theta$$

hay  $\Delta_1 = \Delta_2 \cos \theta$

Định nghĩa các biến không thứ nguyên sau:

$$\delta = \frac{E\Delta_2}{\sigma_p L}; \delta_1 = \frac{E\Delta_1}{\sigma_p L}; \Rightarrow \delta_1 = \delta \cos \theta$$

Phương trình này được gọi là điều kiện tương thích

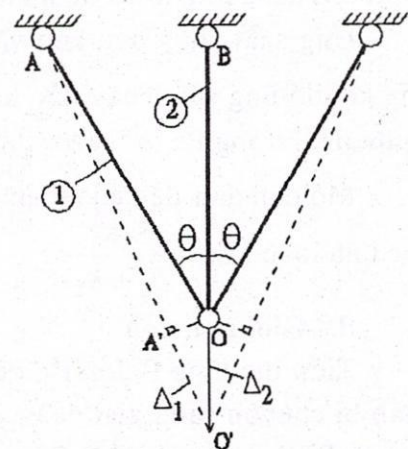
Trong trường hợp bài toán 3 thanh trên,  $\theta = 30^\circ$ , ta có:

$$\delta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \delta$$

**Phương trình cân bằng tĩnh học không thứ nguyên**

$$n_2 + 2 n_1 \cos \theta = p$$

Trong đó :  $n_1 = \frac{N_1}{N_p}$  ;  $n_2 = \frac{N_2}{N_p}$  ;  $p = \frac{P}{N_p}$  ;  $N_p = \sigma_y F$



Hình 5 : Hệ dàn 3 thanh trước và sau biến dạng



Với  $\theta = 30^\circ \Rightarrow n_2 + \sqrt{3} n_1 = p$

Dùng giải thuật “return-mapping” ta sẽ vẽ mối liên hệ giữa 2 biến không thứ nguyên  $(\delta, p)$  và các mối liên hệ  $(\epsilon_1, \sigma_1), (\sigma_2, \epsilon_2)$  tương ứng.

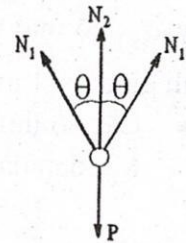
**4.2 Luật ứng xử đàn-dẻo tái bền đẳng hướng**

Do tính chất đối xứng, ứng xử của thanh 3 tương tự như thanh

1. Do đó ta chỉ cần xét ứng xử của thanh 1 và 2.

**a. Trạng thái đàn hồi**

Cho lực P tăng từ từ, trong giai đoạn đầu ứng xử của cả hai thanh đều là đàn hồi, tương ứng trong hình 7, 8, 9 là đoạn OA, O'A', O''A''.



Hình 6 : Cân bằng nút

Ứng suất chảy dẻo kéo và nén của cả 2 thanh là như nhau và có giá trị tuyệt đối cùng bằng nhau  $|\sigma_p^1| = |\sigma_p^2| = |\sigma_\gamma|$ .

Trong ma trận độ cứng của mỗi thanh, mô đun đàn-dẻo chính là mô đun đàn hồi.

**b. Giới hạn đàn hồi**

Tiếp tục tăng tải P đến P1, do biến dạng của thanh thứ 2 lớn hơn thanh 1, nên ứng suất trong thanh 2 sẽ đạt ngưỡng chảy dẻo trước. Trên các hình 7, 8, 9, tương ứng là các điểm A, A', A'', lúc này thanh 1 vẫn còn làm việc trong giai đoạn đàn hồi.

Ứng suất chảy dẻo kéo và nén của cả 2 thanh vẫn như nhau và có cùng giá trị tuyệt đối  $|\sigma_p^1| = |\sigma_p^2| = |\sigma_\gamma|$ .

Trong ma trận độ cứng của mỗi thanh, mô đun đàn-dẻo vẫn là mô đun đàn hồi.

**c. Trạng thái đàn-dẻo**

Tiếp tục tăng tải P, lúc này thanh 2 sẽ làm việc trong giai đoạn dẻo tái bền đẳng hướng, còn thanh 1 vẫn còn làm việc trong giai đoạn đàn hồi. Ta nói cấu trúc ở trạng thái đàn-dẻo. Tương ứng trên các hình 7, 8, 9 là các đoạn AB, A'B', A''B''.

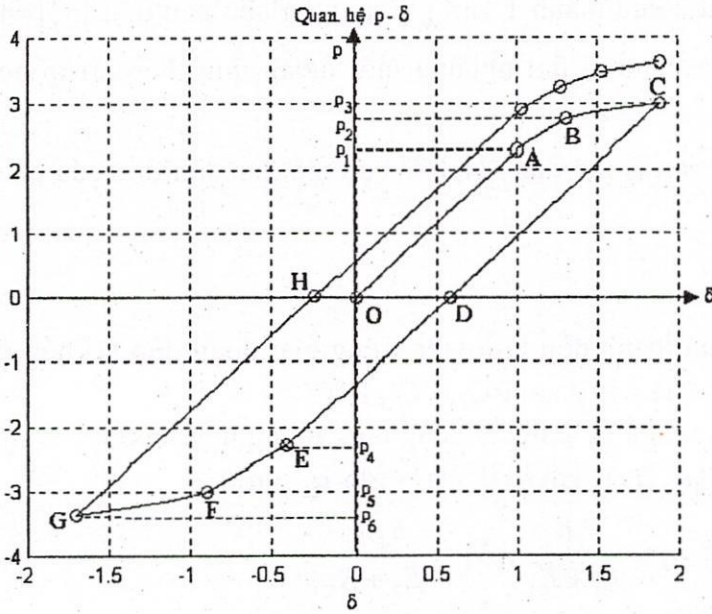
Ứng suất chảy dẻo kéo và nén của thanh 1 vẫn giữ nguyên như ban đầu  $|\sigma_p^1| = |\sigma_\gamma|$ , trong khi đó ứng suất chảy dẻo kéo và nén của thanh 2 bắt đầu tăng (về trị tuyệt đối) tương ứng theo tải trọng P :  $|\sigma_p^2| = |\sigma_\gamma| + K_2 \alpha_2(P)$ .

Mô đun đàn-dẻo của thanh 1 vẫn là mô đun đàn hồi, còn mô đun đàn-dẻo của thanh 2

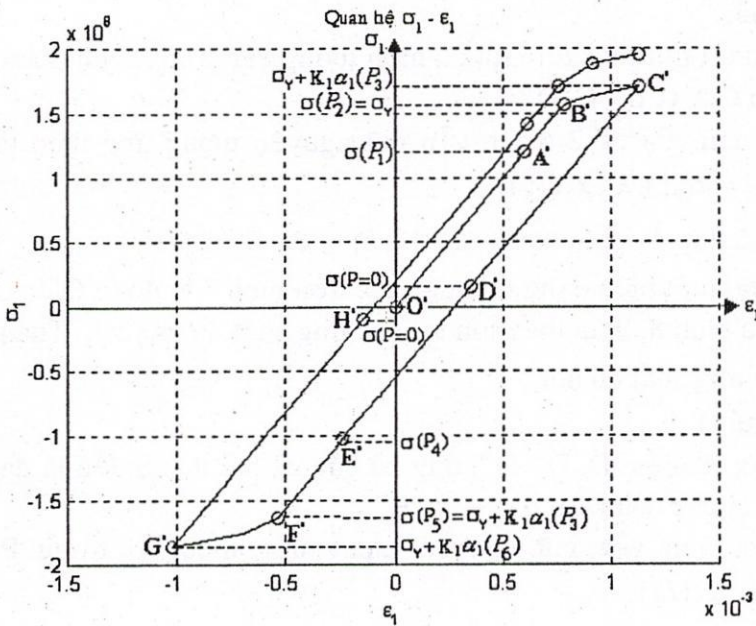
được tính toán :  $E_2 = \frac{E_2 K_2}{E_2 + K_2}$

**d. Giới hạn dẻo**

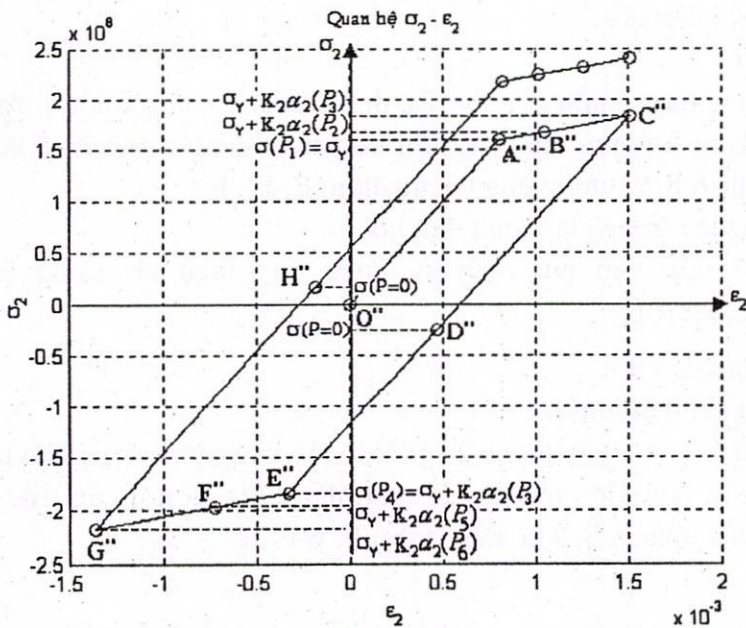
Tiếp tục tăng P đến P2, đến lượt thanh 1 đạt đến giới hạn chảy dẻo, lúc này kết cấu chuẩn bị chuyển sang giai đoạn dẻo tái bền đẳng hướng. Trạng thái này tương ứng với các điểm B, B', B'' của các hình 7, 8, 9.



Hình 7 : Quan hệ giữa 2 đại lượng không thứ nguyên  $p - \delta$



Hình 8 : Quan hệ giữa  $\sigma_1 - \epsilon_1$  của thanh 1



Hình 9 : Quan hệ giữa  $\sigma_2 - \epsilon_2$  của thanh 2



Ứng suất chảy dẻo kéo và nén của thanh 1 vẫn giữ nguyên như ban đầu  $|\sigma_p^1| = |\sigma_Y|$ .  
 Ứng suất chảy dẻo kéo và nén của thanh 2 đạt ngưỡng mới tương ứng theo tải trọng  $P_2$ :  
 $|\sigma_p^2| = |\sigma_Y| + K_2 \alpha_2(P_2)$ .

Mô đun đàn-dẻo của thanh 1 vẫn là mô đun đàn hồi, còn mô đun đàn-dẻo của thanh 2 vẫn là  $E_2 = \frac{E_2 K_2}{E_2 + K_2}$ .

**e. Trạng thái dẻo tái bền**

Tiếp tục tăng P đến  $P_3$ , cả hai thanh đều làm việc trong giai đoạn dẻo tái bền đẳng hướng. Tương ứng trên các hình 7, 8, 9 là các đoạn BC, B'C', B"C".

Ứng suất chảy dẻo kéo và nén của cả 2 thanh cùng tăng tương ứng theo tải trọng  $P_3$ :  
 $|\sigma_p^1| = |\sigma_Y| + K_1 \alpha_1(P_3)$ ,  $|\sigma_p^2| = |\sigma_Y| + K_2 \alpha_2(P_3)$ , với  $|\sigma_p^2| > |\sigma_p^1|$  (do  $\alpha_2 > \alpha_1$ ).

Mô đun đàn-dẻo tương ứng là  $E_1 = \frac{E_1 K_1}{E_1 + K_1}$ ,  $E_2 = \frac{E_2 K_2}{E_2 + K_2}$ .

**f. Trạng thái cắt tải đàn hồi**

Từ các điểm C, C', C'', giảm tải từ từ về zero, ta có hiện tượng cắt tải đàn hồi, tương ứng trên các hình 7, 8, 9 là các đoạn CD, C'D', C"D".

Ứng suất chảy dẻo kéo và nén của cả 2 thanh vẫn giữ nguyên tương ứng theo tải trọng  $P_3$ :  $|\sigma_p^1| = |\sigma_Y| + K_1 \alpha_1(P_3)$ ,  $|\sigma_p^2| = |\sigma_Y| + K_2 \alpha_2(P_3)$ .

Mô đun đàn-dẻo trở thành mô đun đàn hồi tương ứng là  $E_1 = E$ ,  $E_2 = E$ .

Khi  $P = 0$ , trong kết cấu tồn tại một biến dạng thường trực, trên hình 7 là đoạn OD.

Đồng thời tương ứng trên các hình 8, 9, ta thấy tồn tại các ứng suất dư  $\sigma_1, \sigma_2$ . Thanh 1 chịu ứng suất dư kéo, thanh 2 chịu ứng suất dư nén.

**g. Gia tải theo chiều âm (nén)**

Thay chiều tải trọng tác dụng từ điểm D, D', D'', ứng xử của cả hai thanh đều là đàn hồi, tương ứng trên các hình 7, 8, 9 là các đoạn DE, D'E', D"E".

Ứng suất chảy dẻo kéo và nén vẫn giữ nguyên tương ứng theo tải trọng  $P_3$ :  
 $|\sigma_p^1| = |\sigma_Y| + K_1 \alpha_1(P_3)$ ,  $|\sigma_p^2| = |\sigma_Y| + K_2 \alpha_2(P_3)$ .

Mô đun đàn-dẻo vẫn là mô đun đàn hồi.

**h. Giới hạn đàn hồi khi nén**

Tiếp tục tăng tải trọng tác dụng theo chiều nén  $P = P_4$ , thanh 2 do đã chịu trước 1 ứng suất dư nén tại  $P = 0$ , và có biến dạng lớn hơn thanh 1, nên ứng suất trong thanh 2 sẽ đạt ngưỡng chảy dẻo trước. Trên các hình 7, 8, 9, tương ứng là các điểm E, E', E".

Lúc này thanh 1 vẫn còn làm việc trong giai đoạn đàn hồi.

Ứng suất chảy dẻo kéo và nén vẫn giữ nguyên tương ứng theo tải trọng  $P_3$ :  
 $|\sigma_p^1| = |\sigma_Y| + K_1 \alpha_1(P_3)$ ,  $|\sigma_p^2| = |\sigma_Y| + K_2 \alpha_2(P_3)$ .

Mô đun đàn-dẻo vẫn là mô đun đàn hồi.

**i. Trạng thái đàn-dẻo dưới tải trọng nén**

Tiếp tục tăng tải P theo chiều nén, lúc này thanh 2 sẽ làm việc trong giai đoạn dẻo tái bền đẳng hướng, còn thanh 1 vẫn còn làm việc trong giai đoạn đàn hồi. Ta nói cấu trúc ở trạng thái đàn dẻo. Tương ứng trên các hình 7, 8, 9 là các đoạn EF, E'F', E"F".



Ứng suất chảy dẻo kéo và nén của thanh 1 vẫn giữ nguyên tương ứng theo tải trọng  $P_3$ :  $|\sigma_p^1| = |\sigma_Y| + K_1\alpha_1(P_3)$ , của thanh 2 bắt đầu tăng tương ứng theo tải trọng  $P$ :  $|\sigma_p^2| = |\sigma_Y| + K_2\alpha_2(P)$ .

Mô đun đàn-dẻo của thanh 1 vẫn là mô đun đàn hồi, của thanh 2 là  $E_2 = \frac{E_2K_2}{E_2 + K_2}$ .

**j. Giới hạn dẻo dưới tải trọng nén**

Tiếp tục tăng tải theo chiều nén  $P = P_5$ , đến lượt thanh 1 đạt đến giới hạn chảy dẻo, lúc này kết cấu chuẩn bị chuyển sang giai đoạn dẻo tái bền đẳng hướng. Trạng thái này tương ứng với các điểm F, F', F" trên các hình 7, 8, 9.

Ứng suất chảy dẻo kéo và nén của thanh 1 vẫn giữ nguyên tương ứng theo tải trọng  $P_3$ :  $|\sigma_p^1| = |\sigma_Y| + K_1\alpha_1(P_3)$ , và của thanh 2 theo tải trọng  $P_5$ :  $|\sigma_p^2| = |\sigma_Y| + K_2\alpha_2(P_5)$ .

Mô đun đàn-dẻo của thanh 1 vẫn là mô đun đàn hồi, của thanh 2 là  $E_2 = \frac{E_2K_2}{E_2 + K_2}$ .

**k. Giai đoạn chảy dẻo tái bền đẳng hướng dưới tải trọng nén**

Tiếp tục tăng  $P$  đến  $P_6$  (theo chiều nén), cả hai thanh đều làm việc trong giai đoạn dẻo tái bền đẳng hướng. Tương ứng trên các hình 7, 8, 9 là các đoạn FG, F'G', F"G".

Ứng suất chảy dẻo kéo và nén của cả hai thanh tăng tương ứng theo tải trọng  $P_6$ :  $|\sigma_p^1| = |\sigma_Y| + K_1\alpha_1(P_6)$ ,  $|\sigma_p^2| = |\sigma_Y| + K_2\alpha_2(P_6)$ , với  $|\sigma_p^2| > |\sigma_p^1|$  (do  $\alpha_2 > \alpha_1$ ).

Mô đun đàn-dẻo tương ứng là  $E_1 = \frac{E_1K_1}{E_1 + K_1}$ ,  $E_2 = \frac{E_2K_2}{E_2 + K_2}$ .

**l. Tiếp tục cắt tải theo chiều ngược lại**

Từ các điểm G, G', G", giảm tải từ từ về zero, ta có hiện tượng cắt tải đàn hồi, tương ứng trên các hình 7, 8, 9 là các đoạn GH, G'H', G"H".

Ứng suất chảy dẻo kéo và nén của hai thanh vẫn giữ nguyên tương ứng theo tải trọng  $P_6$ :  $|\sigma_p^1| = |\sigma_Y| + K_1\alpha_1(P_6)$ ,  $|\sigma_p^2| = |\sigma_Y| + K_2\alpha_2(P_6)$ .

Mô đun đàn-dẻo trở thành mô đun đàn hồi tương ứng là  $E_1 = E$ ,  $E_2 = E$ .

Khi  $P = 0$ , trong kết cấu tồn tại một biến dạng thường trực, trên hình 7 là đoạn HO.

Đồng thời tương ứng trên các hình 8, 9, ta thấy tồn tại các ứng suất dư  $\sigma_1, \sigma_2$ . Thanh 1 chịu ứng suất dư nén, thanh 2 chịu ứng suất dư kéo.

**m. Tiếp tục gia tải theo chiều chịu kéo**

Quá trình cứ tiếp tục như bước a ở trên cho đến khi các thanh bị phá hủy.

**5. Kết luận**

Kết quả số của bài toán 3 thanh khi sử dụng giải thuật "return-mapping" hoàn toàn phù hợp với lý thuyết đàn-dẻo tái bền đẳng hướng. Một hạn chế của thuật toán này là chưa tính đến hiệu ứng Baushinger. Tính chất bất đẳng hướng khi chảy dẻo của vật liệu ban đầu đẳng hướng sẽ được mô tả trong nghiên cứu tiếp theo với lý thuyết đàn-dẻo tái bền đẳng hướng động học.

Mô hình 1 chiều là một cơ sở tốt để phát triển cho các mô hình 2 chiều, 3 chiều.

Bài báo này được hoàn thành dưới sự tài trợ của đề tài nghiên cứu cơ bản "Quy luật ứng xử của vật liệu composite", MS : 310202.



## NUMERICAL SOLVING THE ONE-DIMENSION ELASTIC-PLASTIC PROBLEM BY “RETURN MAPPING” ALGORITHM

Nguyen Thoi Trung<sup>(1)</sup>, Ngo Thanh Phong<sup>(1)</sup>, Nguyen Phu Vinh<sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup> Department of Mathematics & Informatics, University of Natural Sciences – VNU-HCM

<sup>(2)</sup> Department of Information Technology, College of Industry IV – HCM City

**ABSTRACT:** The paper presents the model and “return-mapping” algorithm for the elastic-plastic problem with one-dimension isotropic hardening. Then applying to solve the 3-bar problem.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Bùi Công Thành, *Cơ kết cấu nâng cao*, NXB Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh, 2002.
- [2] D.R.J.Owen, E.Hinton, *Finite elements in plasticity*, Pineridge Press Limited Swansea U.K, 1980.
- [3] J.C.Simo, T.J.R.Hughes, *Computational Inelasticity*, Springer, 1998.
- [4] Kachanov, *Cơ sở lý thuyết dẻo*, Nhà xuất bản ĐH & THCN, Hà Nội, 1977.
- [5] Nguyen Dang Hung, *Cours de complements de mecanique des solides*, Université de Liège, 1999.