

Ở đây δ_{ij} là ký hiệu Kronecker, và có sử dụng các ký hiệu của phép tính tenxơ [7] (lấy tổng theo chỉ số lặp, ...).

Nghiệm cơ bản của hệ phương trình (1) chính là "tenxơ các chuyển vị đơn vị ảnh hưởng $U_{ij}(x, \xi)$ " (do các lực đơn vị $F_i(x) = 1$ đặt tại điểm $x \in V$ gây nên tại điểm $\xi \in V$) có dạng sau [2, 6]:

- Đối với trường hợp 2D:

$$U_{ij}(x, \xi) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} [(3-4\nu)\delta_{ij} \ln(1/r) + r_{,i} r_{,j}] \tag{4}$$

và $\alpha = 1$ cho công thức (6)

Đối với trường hợp 3I

$$U_{ij}(x, \xi) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i} r_{,j}]$$

và $\alpha = 2$ cho công thức (6) (5)

Trong đó: ν là hệ số Poisson, r là khoảng cách giữa 2 điểm $x, \xi \in V$

Tenxơ ứng lực $T_{ij}(x, \xi)$ tương ứng với (4) và (5) có dạng:

$$T_{ij}(x, \xi) = \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{ij} + (1+\alpha)r_{,i} r_{,j}] \frac{\partial r}{\partial n} + (1-2\nu)(r_{,j} n_i - r_{,i} n_j) \right\} \tag{6}$$

Áp dụng định lý công tương hỗ Betti, ta thu được hệ thức tích phân Somigliana:

$$u_j(\xi) = \int_S \tau_i(x) U_{ji}(x, \xi) dS_x - \int_S u_i(x) T_{ji}(x, \xi) dS_x + \int_V F_i(x) U_{ji}(x, \xi) dV_x \tag{7}$$

với $\xi \in V$

Nếu cho điểm trong $\xi \in V$ tiến tới điểm biên $y \in S$, sau những biến đổi cần thiết, ta được hệ phương trình tích phân biên:

$$\frac{1}{2} u_j(y) + \sum_i \left\{ \int_{S_t} u_i(x) T_{ji}(x, y) dS_x - \int_{S_u} \tau_i(x) U_{ji}(x, y) dS_x \right\} = W_j(y) \tag{8}$$

trong đó vế phải :

$$W_j(y) = \sum_i \left\{ \int_{S_t} h_i(x) U_{ji}(x, y) dS_x - \int_{S_u} g_i(x) T_{ji}(x, y) dS_x + \int_V F_i(x) U_{ji}(x, y) dV_x \right\} \tag{9}$$

Ta xét trường hợp mật độ lực khối bằng không ($F_i(x) = 0$)

Để giải hệ phương trình tích phân (8), ta xấp xỉ biên S bằng tập hợp N phần tử biên $\Delta_k, k = 1, \dots, N$, mà $N = N_u + N_t$ (trong đó N_u phần tử xấp xỉ phần biên S_u, N_t phần tử xấp xỉ phần biên S_t). Trong phạm vi mỗi phần tử Δ_k ta coi vectơ $u_i(x)$ và $\tau_i(x)$ là không đổi, nghĩa là $u_i(k) = u_i(x), \tau_i(k) = \tau_i(x)$ khi $x \in \Delta_k$, do đó ta thu được hệ phương trình đại tuyến để xác định các giá trị chuyển vị và ứng lực chưa biết trên biên S :

$$\frac{1}{2} u_j(\ell) + \sum_i \left\{ \sum_{k=1}^{N_t} u_i(k) \Delta T_{ji}(k, \ell) - \sum_{k=1}^{N_u} \tau_i(k) \Delta U_{ji}(k, \ell) \right\} = W_j(\ell) \tag{10}$$

với $\ell = 1, 2, \dots, N$; $i, j = 1, 2$ (cho trường hợp 2D); $i, j = 1, 2, 3$ (cho trường hợp 3D); và vế phải:

$$W_j(\ell) = \sum_i \left\{ \sum_{k=1}^{N_t} h_i(k) \Delta U_{ji}(k, \ell) - \sum_{k=1}^{N_u} g_i(k) \Delta T_{ji}(k, \ell) \right\} \tag{11}$$

trong (10) và (11) đã sử dụng ký hiệu:

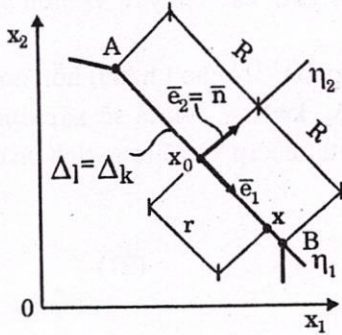
$$\left. \begin{aligned} \Delta U_{ij}(k, \ell) &= \int_{\Delta_k} U_{ij}(x, x_0) dS_x \\ \Delta T_{ij}(k, \ell) &= \int_{\Delta_k} T_{ij}(x, x_0) dS_x \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

với $x_0 \in \Delta_\ell$

Nếu $k \neq \ell$ thì các tích phân (12) là các tích phân hữu hạn và có thể tính được bằng các phương pháp tích phân số (chẳng hạn phương pháp tích phân số Gauss,...). Khi $k = \ell$ tức là điểm x_0 nằm trong phần tử đang xét $x_0 \in \Delta_\ell = \Delta_k$ là miền tích phân, lúc đó các tích phân (12) trở thành các tích phân kỳ dị. Dưới đây ta sẽ dẫn ra các công thức tính các tích phân kỳ dị này theo định nghĩa "giá trị chính của Cauchy" (Cauchy principal value).

Ta xét trường hợp 2D

Chọn hệ tọa độ cục bộ (η_1, η_2) với gốc tọa độ tại điểm kỳ dị x_0 , hệ véc tơ cơ sở (e_1, e_2) và trục η_1 trùng với phương của phần tử $\Delta_\ell = \Delta_k = \overline{AB}$ (Hình 1). Cho điểm kỳ dị X_0 là tâm của đoạn thẳng \overline{AB} , có nghĩa là:



Hình 1

$$R = AX_0 = X_0B = \overline{AB} / 2$$

Còn r là khoảng cách giữa 2 điểm x và x_0 tính theo:

$$r = [(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2]^{1/2} \quad (13)$$

Trong trường hợp này (hình 1) $e_1 \perp e_2 = n$, do đó ta có:

$$\frac{\partial r}{\partial \eta_1} = \frac{\partial r}{\partial \eta_2} = 0 \quad (14)$$

Ký hiệu $\text{Sign}(\eta_1)$ là dấu của η_1 ta được:

$$r = |\eta_1| ; \quad \frac{\partial r}{\partial \eta_1} = \text{Sign}(\eta_1) ; \quad d\eta_1 = (\text{Sign} \eta_1) dr \quad (15)$$

từ (14) suy ra:

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_i}$$

(16)

hay là $r_{,i} = (\text{Sign} \eta_1) e_{1i}$.

Ở đây $e_{1i} = \frac{\partial \eta_1}{\partial x_i} = \cos(\eta_1, x_i)$ là cosin chỉ hướng của phần tử Δ_k đối với trục x_i

Từ (15) ta xét tích phân kỳ dị thứ nhất của (12) và ký hiệu:

$$\Delta U_{ij}^0(k, k) = \frac{\int U_{ij}(x, x_0) dS_x}{\overline{AB}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} [U_{ij}(x, x_0) d\eta_1] \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ 2 \int_{\epsilon}^R U_{ij}(r) dr \right\} \quad (17)$$

Thay (4) vào (17) và kể đến quan hệ (16) ta được:

$$\Delta U_{ij}^0(k, k) = \frac{R}{4\pi\mu(1-\nu)} [(3-4\nu)\delta_{ij}(1-\ln R) + e_{1i}e_{1j}] \quad (18)$$

Vì (14) nên số hạng thứ nhất trong biểu thức (6) bằng không, ta tính phần tích phân kỳ dị của số hạng còn lại trong (6) và ký hiệu như dưới đây, ta được:

$$\Delta T_{ij}^0(k, k) = \frac{\int T_{ij}(x, x_0) dS_x}{\overline{AB}} = \frac{\int T_{ij}(x, x_0) d\eta_1}{\overline{AB}}$$

$$= \frac{-(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} [r_{,j}n_i - r_{,i}n_j] \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ + \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \left(\frac{1}{r} d\eta_1 \right) \right\}$$

$$= \frac{-(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} [e_{1j}n_i - e_{1i}n_j] \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\varepsilon}^R + \int_{\varepsilon}^R \left(\frac{1}{r} dr \right) \right\} = 0$$

hay $\Delta T_{ij}^0(k, k) = 0$ (19)

Công thức (18), (19) cho ta cách tính các tích phân kỳ dị đối với trường hợp 2D.

Vậy là các công thức (12), (18), (19) và (11) cho ta cách tính các hệ số và vế phải của HPTĐSTT (10) để xác định các giá trị chuyển vị biên $u_i(k)$ chưa biết ($k=1, \dots, N_i$) và các giá trị ứng lực biên $\tau_i(k)$ chưa biết ($k=1, \dots, N_u$) và $i=1, 2$ đối với 2D, $i=1, 2, 3$ đối với 3D.

Hệ đại tuyến (10) có thể viết dưới dạng ma trận:

$[A] \{x\} = \{b\}$ (20)

Trong đó $[A]$ là ma trận (bậc $2N \times 2N$ cho trường hợp 2D, $3N \times 3N$ cho t.h.3D) có phần tử là các hệ số tích phân tính theo (12) hoặc (18), (19).

$\{b\}$ là vectơ vế phải (với $2N$ thành phần cho trường hợp 2D, $3N$ cho t.h.3D) được xác định theo (11).

$\{x\}$ là vectơ (với $2N$ thành phần cho trường hợp 2D, $3N$ cho t.h.3D) gồm các chuyển vị biên và ứng lực biên cần tìm (tại các phần tử biên).

Sau khi giải hệ (20) ta xác định được $2N$ thành phần (cho trường hợp 2D, $3N$ cho t.h.3D) hỗn hợp của chuyển vị biên $u_i(k)$ và ứng lực biên $\tau_i(k)$ (trên các phần tử biên Δ_k , $k=1, \dots, N$), ta sẽ xác định được chuyển vị tại điểm trong bất kỳ $z \in V$ của miền đàn hồi theo công thức xấp xỉ hệ thức tích phân Somigliana (7):

$$u_j(z) = \sum_i \left\{ \sum_{k=1}^N \tau_i(k) \Delta U_{ji}(k, z) - \sum_{k=1}^N u_i(k) \Delta T_{ji}(k, z) \right\} \quad (21)$$

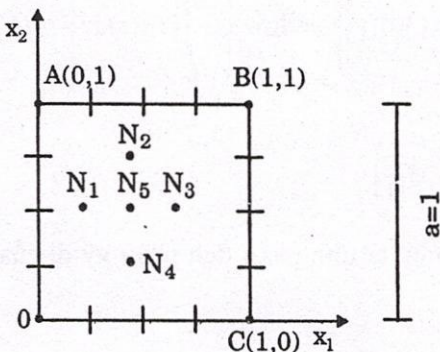
Ở đây ta dùng ký hiệu:

$$\left. \begin{aligned} \Delta U_{ji}(k, z) &= \int_{\Delta_k} U_{ji}(x, z) dS_x \\ \Delta T_{ji}(k, z) &= \int_{\Delta_k} T_{ji}(x, z) dS_x \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

với $z \in V$.

Kết hợp giải hệ (20) và công thức (21) ta được “thuật toán (20) và (21)” của PPPTB để giải bài toán đàn hồi tĩnh.

Dưới đây ta đưa ra ví dụ kiểm chứng thuật toán nói trên



Hình 2

Xét hình vuông với cạnh có độ dài là đơn vị ($a=1$), và các đỉnh $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,1)$, $C(1,0)$ (hình 2). Cho hàm vectơ chuyển vị $u(u_1, u_2)$ thỏa mãn phương trình cân bằng (1), có dạng biểu thức sau:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= [-(1-\nu)\nu/E] (x_1 - 0,5) \\ u_2 &= [-(1-\nu)^2/E] x_2 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

với các hằng số $E = 1$, $\nu = 0.3$. Trên các cạnh biên OA, AB, BC, CO của hình vuông ta cho các giá trị của chuyển vị theo biểu thức (23). Sử dụng thuật toán (20) và (21) nêu trên (với 16 phần tử biên) ta tìm các chuyển vị tại các điểm trong N1, N2, N3, N4, N5. Kết quả tính toán đưa ra trong bảng 1: So sánh các giá trị u_1, u_2 tìm được theo *thuật toán (20) và (21)* của PPPTB và các giá trị chính xác tính theo (23).

BẢNG 1

Điểm	Tọa độ		Chuyển vị theo PPPTB		Chuyển vị chính xác theo (23)	
	x_1	x_2	u_1	u_2	u_1	u_2
N1	0,25	0,5	0,108	0,463	0,0098	0,455
N2	0	0,75	0,002	0,693	0,0	0,683
N3	0,75	0,5	-0,096	0,464	-0,098	0,455
N4	0,5	0,25	0,002	0,237	0,0	0,228
N5	0,5	0,5	0,002	0,465	0,0	0,455

2. Phương pháp xác định tần số dao động riêng bằng cách ứng dụng thuật toán PPPTB của bài toán đàn hồi tĩnh

Cho vật thể đàn hồi tuyến tính với n bậc tự do, sử dụng ma trận độ cứng $[K]_{n \times n}$ và ma trận phân bố khối lượng $[M]_{n \times n}$ của nó, ta có thể thiết lập hệ phương trình để xác định các tần số dao động riêng ω của vật thể dưới dạng

$$([K] - \omega^2 [M]) \{v\} = 0 \tag{24}$$

Trong đó $\{v\}$ là vectơ dạng dao động riêng.

Ta xét ma trận độ mềm $[R]$ là nghịch đảo của ma trận độ cứng, nghĩa là:

$$[K]_{n \times n}^{-1} = [R]_{n \times n} \tag{25}$$

Nhân (24) với (25) từ bên trái, ta được phương trình tương đương để xác định tần số dao động riêng ω .

$$\left(\frac{1}{\omega^2} [E] - [C] \right) \{v\} = 0 \tag{26}$$

ở đây $[E]$ là ma trận đơn vị, và

$$[C] = [R] [M] \tag{26a}$$

với $[R]$ - ma trận độ mềm là ma trận đối xứng, $[M]$ - ma trận phân bố khối lượng là ma trận đường chéo.

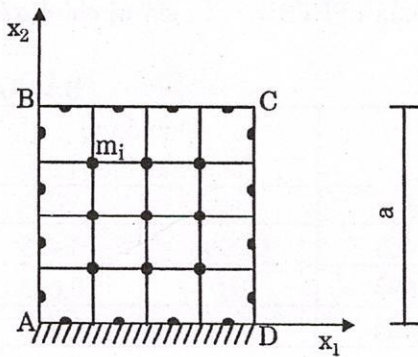
Ta biết rằng, ma trận độ mềm $[R]$ chính là "ma trận các chuyển vị đơn vị ảnh hưởng", nghĩa là các phần tử của ma trận độ mềm $[R] = [r_{ij}]_{n \times n}$ là các chuyển vị theo phương j (nằm trong số n bậc tự do: $j=1, \dots, n$) do lực đơn vị $P_i = 1$ tác dụng theo phương i gây nên ($i=1, \dots, n$). Do đó các chuyển vị này có thể xác định được bằng cách áp dụng *thuật toán (20) và (21)* của PPPTB để giải bài toán đàn hồi tĩnh n lần dưới tác dụng lần lượt của lực đơn vị $P_i = 1$ theo phương i ($i=1, \dots, n$), tức là giải hệ (20) n lần với n vectơ vế phải $\{b\}$. Khi đó ma trận A của hệ (20) chỉ cần thiết lập một lần theo (10), còn n vectơ vế phải $\{b\}$ của (20) được tính theo (4) cho trường hợp 2D hoặc theo (5) cho trường hợp 3D.

Sau khi tìm được các phần tử r_{ij} của ma trận độ mềm $[R]$ ta thiết lập hệ (26) để xác định các tần số riêng ω_k .

Để kiểm chứng thuật toán xác định các tần số dao động riêng ω_k nói trên, ta xét bài toán ví dụ sau đây

Xác định tần số dao động riêng của lăng trụ với thiết diện vuông ABCD (hình 3) có độ dài mỗi cạnh $a = 6M$ và liên kết ngàm trên cạnh DA, với các hằng số vật liệu: modun đàn hồi $E=10^4 MPa$, hệ số Poisson $\nu = 0,2$, mật độ khối lượng $\rho = 1 T/M^3$.

Để giải bài toán này theo thuật toán của PPPTB đối với bài toán tĩnh đàn hồi, ta chia biên của hình vuông thành 16 phần tử, và tập trung khối lượng tại tâm của 16 phần tử biên và 9 nút bên trong hình vuông (hình 3).



Hình 3

Đây là bài toán phẳng, mỗi khối lượng m_i có 2 bậc tự do. Cạnh DA ngàm, nên các khối lượng trên cạnh này không có bậc tự do, vì vậy toàn hệ có 42 bậc tự do.

Đồng thời ta giải bài toán này theo phương pháp phần tử hữu hạn (PPPTH) bằng cách chia mỗi cạnh hình vuông thành 10 phần, do đó ta có sơ đồ tính gồm 121 nút với 220 bậc tự do (trừ 11 nút ở cạnh ngàm không có bậc tự do). Kết quả tính toán 4 tần số riêng đầu tiên theo PPPTB và PPTH được dẫn ra trong bảng 2 để so sánh với kết quả của Brebbia [5].

BẢNG 2

Các tần số dao động riêng	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
Theo PPPTB (bài toán tĩnh)	11,36	26,34	31,61	47,79
Theo PPTH	11,31	26,81	30,27	47,01
Theo PP Brebbia [5]	11,42	26,17	29,9	44,86

Kết luận

Vì ma trận độ mềm $[R]$ được xác định từ lời giải bài toán đàn hồi tĩnh nguyên dạng ban đầu (với các liên kết vốn có), nên nó mô tả sát xao tình trạng biến dạng tổng thể của kết cấu. Cho nên với số phần tử biên không lớn thuật toán nói trên vẫn có thể xác định khá chính xác các tần số riêng đầu tiên.

APPLICATION OF ALGORITHM OF BOUNDARY ELEMENT METHOD IN ELASTOSTATICS FOR DETERMINATION OF EIGEN FREQUENCIES

Chu Viet Cuong

ABSTRACT: At first the algorithm of Boundary element Method (BEM) for solution of elasto – static problems is discussed. The coefficients in the established system of algebraic equations are boundary regular and singular integrals. The regular integrals are calculated by Gauss’ numerical Method, but for calculation of singular ones the analytic formulae are offered. Then an example for test of formed algorithm of BEM is given. Further, the system of equations for determination of eigen frequencies is formed due to the flexibility matrix, the elements of the last one can be defined by the above presented algorithm of BEM. At last a test example is considered for comparison of BEM with finite element Method and result of Brebbia’ Method.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Cruse T.A. and Rizzo F.J. A direct formulation and numerical solution of general transient elasto – dynamic problem I, II, *Jour. of Math. Anal. and appl.* Vol.22, N°1,2 (1968)
- [2] Cruse T.A. Numerical solution in three – dimensional elastostatics. *Inter.Jour. of solids and structures*, vol.5, PP.1259-1274 (1969)

- [3] Kypradze V.D. *Metodu potentsiala v teorii uprugosti*. Moscova -1963 (tiếng Nga)
- [4] Roitfarb I.Z., Chu Viet Cuong. Chislennui Metod reshenia prastranstvenuch dinamicheskich zadach teorii uprugosti na asnove metoda potentsiala. *Xoprotivlenhie Materiala i teoria xaorudzenhia*, N°29, Kiev, 1976, (tiếng Nga)
- [5] Nardini D., Brebbia CA. A new approach to free vibration analysis using boundary element. *Boundary element method in Engineering*. Springer – Verlag – Berlin (1982)
- [6] Brebbia C.A., Telles J.C., Wrobel L.C. *Boundary element techniques-application in Engineering*, Springer – Verlag (1984)
- [7] Chu Việt Cường. *Ứng dụng phương pháp phần tử biên để giải bài toán động lực đàn hồi hai và ba chiều*. “Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị cơ học toàn quốc lần thứ 5”, tập III, Hà Nội 12/1992