THUẬT GIẢI SỐ CHO MỘT BÀI TOÁN BIÊN PHI TUYẾN

Nguyễn Phú Vinh
Trường Cao Đẳng Công Nghiệp 4 TP. HCM
(Bài nhận ngày 17 tháng 6 năm 2002, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 02 tháng 8 năm 2002)

TÓM TẮT: *Trong bài nầy, một thuật giải số để giải bài toán biên phi tuyến được thành lập. Phương pháp nầy dựa vào phương pháp phần tử hữu hạn kết hợp với lược đồ Newton-Raphson. Ví dụ bằng số được cung cấp để thấy hiệu quả của thuật giải.*

1. Mở đầu

Gần đây[7, 8], chúng tôi đã đề cập đến phương pháp phần tử hữu hạn để giải bài toán biên phi tuyến sau:

$$\frac{-d}{dx}[M(x,u'(x))+N(x,u(x))]+g(x)\sin u(x)=f(x)\,,\ 0<x<L\,, \tag{1}$$

$$u(0)=0, \tag{2}$$

$$M(L,u'(L))+N(L,u(L))+b_1\sin u(L)=b_2\,, \tag{3}$$

trong đó $L>0\,,b_1,b_2$ là các hằng số cho trước, các hàm số $M,N:[0,L]\times R\to R$, $f,g:(0,L)\to R$ là cho trước thỏa các điều kiện thích hợp. Bài toán (1)-(3) là dạng tổng quát mô tả sự uốn của một thanh đàn hồi phi tuyến có chiều dài L với khối lượng riêng γ_0 bị giữ chặt một đầu và được nhúng chìm theo phương thẳng đứng trong một chất lỏng có khối lượng riêng γ_1 mà Tucsnak [6] đã thiết lập tương ứng với trường hợp $g(x)=-\lambda+(\gamma_0-\gamma_1)F(x)+G'(L)$, $b_1=\gamma_1 G(L), b_2=0$, $f(x)=0$, $N(x,u)=0$, trong đó λ là một hằng số dương, $g(x)$, $G(x)$ là các hàm cho trước có ý nghĩa cơ học nào đó. Do sự khác nhau về các khối lượng riêng của thanh và chất lỏng, lực đẩy Archimede và các ngoại lực khác tác dụng trên thanh làm cho thanh bị uốn cong theo một góc $u(x)$ giữa tiếp tuyến với thanh ở trạng thái bị uốn tại điểm của thanh có hoành độ cong x và trục thẳng đứng Oy. Từ khi bài toán nầy xuất hiện đã có nhiều tác giả khác quan tâm nghiên cứu chẳng hạn như: N.T.Long và T.V.Lăng [2], T.V.Lăng[1], N.H. Nghĩa và N.T.Long [5], Long, Dũng, Thuyết [3], Long, Dũng, Nghĩa, Thuyết [4], Lăng, Vinh [7], Long, Lăng, Vinh [8]. Bài toán (1) -(3) là phi tuyến xuất hiện trong phương trình vi phân (1) và cả trong điều kiện biên (3).

Trong [7, 8] nghiệm bài toán (1)-(3) được xấp xỉ bởi một dãy hội tụ $\{u_m\}$ xác định bởi công thức

$$u_m=\sum_{j=1}^{m}c_{mj}w_j\,, \tag{4}$$

trong đó $w_j\,,1\le j\le m$ là các hàm cơ sở trong phương pháp phần tử hữu hạn như sau:

$$w_j(x)=\begin{cases}(x-x_{j-1})/h, & \text{nếu } x_{j-1}\le x\le x_j,\\ (x_{j+1}-x)/h, & \text{nếu } x_j\le x\le x_{j+1},\\ 0, & \text{nếu } x\notin[x_{j-1},x_{j+1}]\end{cases}\qquad (1\le j\le m-1), \tag{5a}$$

$$w_m(x) = \begin{cases} (x - x_{m-1})/h, & \text{nếu } x_{m-1} \le x \le L, \\ 0, & \text{nếu } 0 \le x \le x_{m-1}. \end{cases} \tag{5b}$$

với $x_j = jh, h = L/m$, $1 \le j \le m$.

Trong (4) các hệ số $c_{m1}, c_{m2}, ..., c_{mm}$ là nghiệm của một hệ m- phương trình đại số phi tuyến có dạng:

$$F_i(c_{m1}, c_{m2}, ..., c_{mm}) = 0, \quad 0 \le i \le m. \tag{6}$$

Trong [7, 8], chúng tôi đã chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm của hệ (6). Với u_m xác định bởi (4)-(6), chúng tôi cũng thu được các kết quả về sự hội tụ, về đánh giá sai số giữa nghiệm xấp xỉ u_m và nghiệm chính xác (theo một chuẩn thích hợp, ở đây chúng tôi đã sử dụng chuẩn trong không gian Sobolev cấp 1) như sau:

$$\|u_m - u\|_{H^1(0,L)} \le \frac{C}{m}, \tag{7}$$

trong đó hằng số C độc lập với m và phụ thuộc vào $L, b_1, b_2, g, f, M, N, \|u''\|_{L^2}$.

Trong bài nầy, chúng tôi sử dụng phương pháp xấp xỉ phần tử hữu hạn để giải số bài toán biên phi tuyến cụ thể sau (tương ứng với $L = 1$):

$$\frac{-d}{dx}[(2 + \sin x)(u'(x) + u'^3(x)) + \frac{1}{4}\cos(xu(x))] + \frac{1}{4}\sin u(x) = f(x), 0 < x < 1, \tag{8}$$

$$u(0) = 0, \tag{9}$$

$$(2 + \sin 1)(u'(1) + u'^3(1)) + \frac{\cos u(1) + \sin u(1)}{4} = b_2, \tag{10}$$

trong đó

$$b_2 = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{3}) + \frac{\pi^2\sqrt{3}}{36}[1 + \frac{3\pi^4}{(36)^2}](2 + \sin 1), \tag{11}$$

$$\begin{aligned} f(x) = &\frac{1}{4}\sin(2a\sin ax) - 2a^2[1 + 4a^4\cos^2(ax)]\cos(ax)\cos x \\ &+ 2a^3[1 + 12a^4\cos^2(ax)]\sin(ax)(2 + \sin x) \\ &+ \frac{1}{2}a[\sin(ax) + ax.\cos(ax)]\sin(2ax.\sin ax), \ a = \pi/6. \end{aligned} \tag{12}$$

Nghiệm chính xác của bài toán (8)-(12) là $U_{ex}(x) = \frac{\pi}{3}\sin(\frac{\pi x}{6})$.

Trước hết, chúng tôi xấp xỉ bài toán (8)-(12) bởi dãy $\{u_m\}$, mà điều này đưa đến việc giải hệ (6) tương ứng. Sau đó, ở hệ nầy chúng tôi giải gần đúng hệ (6) bằng thuật giải Newton- Raphson. Các kết quả tính toán trên bài toán cụ thể (8)-(12) lần lượt với m = 5, 10, 15, 20, 30, 50 phù hợp với đánh giá sai số (7).

2. Thiết lập thuật giải cho bài toán (1)-(3)

Giả sử rằng các hằng số $L > 0, b_1, b_2$ và các hàm số M, N, f, g thỏa các điều kiện của các định lý tồn tại, duy nhất nghiệm và yêu cầu về đánh giá sai số như trong [7, 8]. Trước hết, ta thiết lập hệ phương trình (6) cho bài toán (1)-(3).

Cố định m, bỏ qua các chỉ số dưới m trong các cách viết và ta viết

$c=(c_1,c_2,...,c_m)$ và $u_m(x)=\sum_{j=1}^{m} c_j w_j(x)$ lần lượt thay cho $c_m=(c_{m1},c_{m2},...,c_{mm})$ và

$u_m(x)=\sum_{j=1}^{m} c_{mj} w_j(x)$.

Để cho tiện ta ký hiệu đạo hàm là dấu chấm thay vì dấu phẩy, chẳng hạn:

$$\dot{u}_m(x)=\sum_{j=1}^{m} c_j \dot{w}_j(x),\ \ddot{u}_m(x)=\sum_{j=1}^{m} c_j \ddot{w}_j(x)$$

Theo như [7, 8], ta tìm $c=(c_1,c_2,...,c_m)\in IR^m$ thỏa hệ phương trình phi tuyến (6), tức là

$$F(c)=0, \tag{2.1}$$

với $F: IR^m \to IR^m$ cho bởi $F(c)=(F_1(c),F_2(c),...,F_m(c))$,

$$F_i(c)=\langle M(x,\dot{u}_m)+N(x,u_m),\dot{w}_i\rangle+\langle g(x)\sin u_m,w_i\rangle$$
$$+(b_1\sin u_m(L)-b_2)w_i(L)-\langle f,w_i\rangle,\ 1\le i\le m, \tag{2.2}$$

trong đó ta ký hiệu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ chỉ tích vô hướng như $\langle u,v\rangle=\int_0^L u(x)v(x)dx$.

Ta sử dụng thuật giải Newton- Raphson cho hệ (2.1)-(2.2) như sau:

Thuật giải Newton- Raphson

Cho trước $c^{(0)}=(c_1^{(0)},c_2^{(0)},...,c_m^{(0)})\in IR^m$ (đủ gần nghiệm) (2.3)

Giả sử biết $c^{(k-1)}=(c_1^{(k-1)},c_2^{(k-1)},...,c_m^{(k-1)})\in IR^m$.

Ta tìm $c^{(k)}=(c_1^{(k)},c_2^{(k)},...,c_m^{(k)})\in IR^m$ theo các bước như sau:

(i) Tính $u_m^{(k-1)}(x)=\sum_{j=1}^{m} c_j^{(k-1)} w_j(x)$. (2.4)

(ii) Tìm $e^{(k)}\in IR^m$ (vectơ cột) là nghiệm của hệ tuyến tính

$$A^{(k)}e^{(k)}=B^{(k)}, \tag{2.5}$$

$A^{(k)}=J_F(c^{(k-1)})=\left(\frac{\partial F_i}{\partial c_j}(c^{(k-1)})\right)\equiv(a_{ij}^{(k)})$ là ma trận Jacobi của F,

$B^{(k)}=-F(c^{(k-1)})\equiv(B_1^{(k)},B_2^{(k)},...,B_m^{(k)})^T\in IR^m$,

$$a_{ij}^{(k)}=\frac{\partial F_i}{\partial c_j}(c^{(k-1)})=\langle\frac{\partial M}{\partial y}(x,\dot{u}_m^{(k-1)})\dot{w}_j+\frac{\partial N}{\partial y}(x,u_m^{(k-1)})w_j,\dot{w}_i\rangle$$
$$+\langle g(x)(\cos u_m^{(k-1)})w_j,w_i\rangle+b_1\cos(u_m^{(k-1)}(L))\,w_j(L)w_i(L)$$
$$=\int_0^L\frac{\partial M}{\partial y}(x,\dot{u}_m^{(k-1)}(x))\,\dot{w}_j(x)\dot{w}_i(x)dx$$
$$+\int_0^L\frac{\partial N}{\partial y}(x,u_m^{(k-1)}(x))w_j(x)\dot{w}_i(x)dx+\int_0^L g(x)\cos(u_m^{(k-1)}(x))w_j(x)w_i(x)dx$$
$$+b_1\cos(u_m^{(k-1)}(L))\,w_j(L)w_i(L),\quad 1\le i,j\le m. \tag{2.6}$$

$$B_i^{(k)} = -F_i(c^{(k-1)}) = -\langle M(x,\dot{u}_m^{(k-1)}) + N(x,u_m^{(k-1)}), \dot{w}_i\rangle - \langle g(x)(\sin u_m^{(k-1)}), w_i\rangle$$
$$- (b_1 \sin(u_m^{(k-1)}(L)) - b_2) w_i(L) + \langle f, w_i\rangle$$
$$= -\int_0^L [M(x,\dot{u}_m^{(k-1)}(x)) + N(x,u_m^{(k-1)}(x))]\dot{w}_i(x)dx$$
$$- \int_0^L g(x)\sin(u_m^{(k-1)}(x)) w_i(x)dx - (b_1 \sin(u_m^{(k-1)}(L)) - b_2) w_i(L) + \langle f, w_i\rangle,$$
$$1 \le i \le m. \qquad (2.7)$$

(iii) $c^{(k)} = c^{(k-1)} + e^{(k)}$. (2.8)

3. Thuật giải Newton- Raphson cho bài toán (8)-(12)

Áp dụng với bài toán cụ thể (8)-(12), thuật giải Newton- Raphson (2.3)-(2.8) với các công thức (2.6), (2.7) có công thức cụ thể tương ứng với:

$$L = 1,\ b_1 = 1/4,\ b_2 = \frac{1}{8}(1+\sqrt{3}) + \frac{\pi^2\sqrt{3}}{36}[1 + \frac{3\pi^4}{(36)^2}](2+\sin 1)$$

$M(x,y) = (2+\sin x)(y+y^3)$, $N(x,y) = \frac{1}{4}\cos(xy)$, $g(x) = g = 1/4$ (hằng số),

$$f(x) = \frac{1}{4}\sin(2a\sin ax) - 2a^2[1+4a^4\cos^2(ax)]\cos(ax)\cos x$$
$$+ 2a^3[1+12a^4\cos^2(ax)]\sin(ax)(2+\sin x)$$
$$+ \frac{1}{2}a[\sin(ax) + ax.\cos(ax)]\sin(2ax.\sin ax),\ a = \pi/6.$$

• Hệ (2.5) - (2.7) viết lại với ma trận và vector cụ thể như sau:

$$a_{ij}^{(k)} = \frac{\partial F_i}{\partial c_j}(c^{(k-1)}) = \int_0^1 (2+\sin x)[1+3(\dot{u}_m^{(k-1)}(x))^2]\dot{w}_j(x)\dot{w}_i(x)dx$$
$$- \frac{1}{4}\int_0^1 x\sin(x.u_m^{(k-1)}(x))\, w_j(x)\dot{w}_i(x)dx$$
$$+ \frac{1}{4}\int_0^1 \cos(u_m^{(k-1)}(x))\, w_j(x)w_i(x)dx$$
$$+ \frac{1}{4}\cos(u_m^{(k-1)}(1))\, w_j(1)w_i(1),\quad 1 \le i, j \le m. \qquad (2.6')$$

$$B_i^{(k)} = -F_i(c^{(k-1)})$$
$$= -\int_0^1 [(2+\sin x)(\dot{u}_m^{(k-1)}(x) + (\dot{u}_m^{(k-1)}(x))^3) + \frac{1}{4}\cos(x.u_m^{(k-1)}(x))]\dot{w}_i(x)dx$$
$$- \frac{1}{4}\int_0^1 \sin(u_m^{(k-1)}(x))\, w_i(x)dx - (\frac{1}{4}\sin(u_m^{(k-1)}(1)) - b_2)w_i(1)$$
$$+ \int_0^1 f(x)w_i(x)dx,\ 1 \le i \le m. \qquad (2.7')$$

4. Áp dụng bằng số

Tính toán bằng thuật giải Newton- Raphson (2.3) -(2.5), (2.6'), (2.7'), (2.8) với cho đến bước lặp k sao cho

$$\left\|c^{(k)}-c^{(k-1)}\right\|_\infty=\left\|e^{(k)}\right\|_\infty=\max_{1\le i\le m}\left|e_i^{(k)}\right|<10^{-16},$$

khi đó $c^{(k)}=c^{(k-1)}+e^{(k)}\equiv c_m^{(k)}$ (phụ thuộc vào m mà ta đã bỏ qua trong cách viết để cho đơn giản). Các tích phân xuất hiện trong các công thức (2.6'), (2.7') được tính bằng công thức tích phân số Simpson hoặc Gauss. Sử dụng các tính toán trên chương trình chạy trên Maple 6.

Chúng tôi thu được các kết quả tính toán và so sánh với nghiệm chính xác $U_{ex}(x)=\frac{\pi}{3}\sin(\frac{\pi x}{6})$ tương ứng với: m = 10 (xem bảng A1), m = 20 (xem bảng A2, Hình 1), m = 30 (xem Hình 2).

Tính toán lần lượt với $m=5,10,15,20,30,50$, ta cũng thu được bảng B sau đây cho thấy sai số $E_m^{(k)}\equiv\left\|c_m^{(k)}-U_{ex}\right\|_\infty=\max_{1\le i\le m}\left|c_{mi}^{(k)}-U_{ex}(x_i)\right|$ giảm dần khi cho m tăng dần.

Bảng A1: m = 10:

$x_i=i/m$	$c_{mi}^{(k)}$	$U_{ex}(x_i)$	$\left\|c_{mi}^{(k)}-U_{ex}(x_i)\right\|$
0.1	0.0468	0.0548	0.0081
0.2	0.0924	0.1095	0.0171
0.3	0.1370	0.1638	0.0268
0.4	0.1808	0.2177	0.0369
0.5	0.2239	0.2710	0.0471
0.6	0.2663	0.3236	0.0573
0.7	0.3081	0.3753	0.0672
0.8	0.3486	0.4259	0.0773
0.9	0.3860	0.4754	0.0849
1.0	0.4158	0.5236	0.1078

Kết quả về sai số với m = 10: $E_{10}^{(k)}\equiv\max_{1\le i\le 10}\left|c_{10i}^{(k)}-U_{ex}(x_i)\right|=0.1078$.

Bảng A2: m = 20:

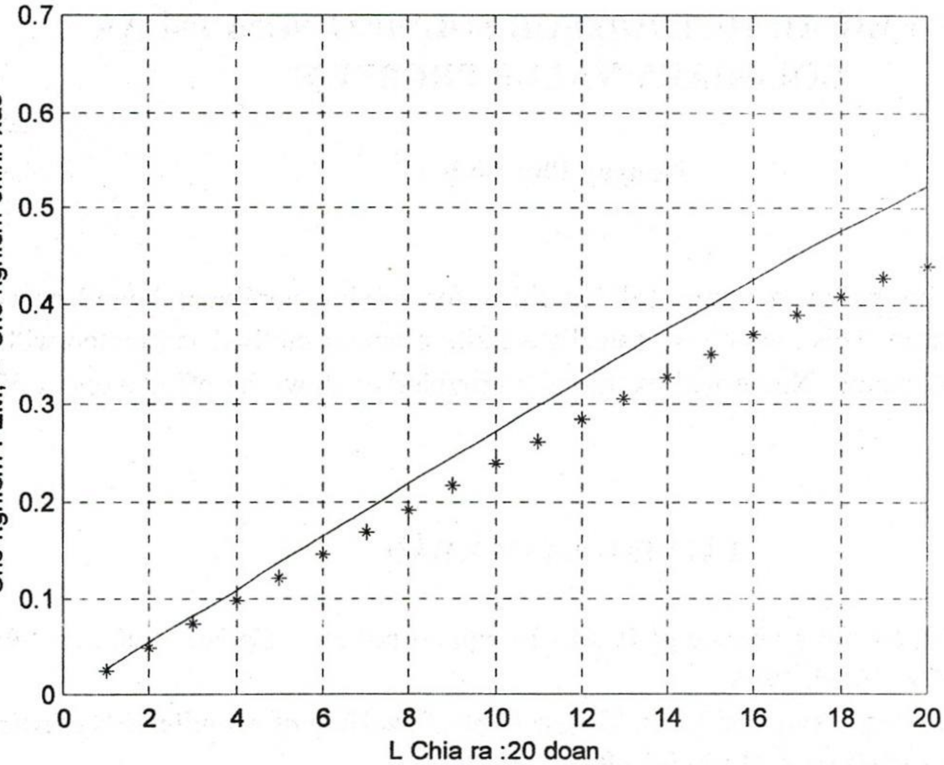
$x_i=i/m$	$c_{mi}^{(k)}$	$U_{ex}(x_i)$	$\left\|c_{mi}^{(k)}-U_{ex}(x_i)\right\|$
0.05	0.0249	0.0274	0.0025
0.10	0.0495	0.0548	0.0053
0.15	0.0739	0.0822	0.0083
0.20	0.0979	0.1095	0.0115
0.25	0.1217	0.1367	0.0150

0.30	0.1453	0.1638	0.0185
0.35	0.1686	0.1908	0.0222
0.40	0.1918	0.2177	0.0259
0.45	0.2147	0.2445	0.0297
0.50	0.2375	0.2710	0.0335
0.55	0.2601	0.2974	0.0373
0.60	0.2826	0.3236	0.0410
0.65	0.3049	0.3496	0.0447
0.70	0.3270	0.3753	0.0483
0.75	0.3487	0.4007	0.0521
0.80	0.3698	0.4259	0.0561
0.85	0.3902	0.4508	0.0606
0.90	0.4092	0.4754	0.0662
0.95	0.4263	0.4997	0.0734
1.00	0.4402	0.5236	0.0834

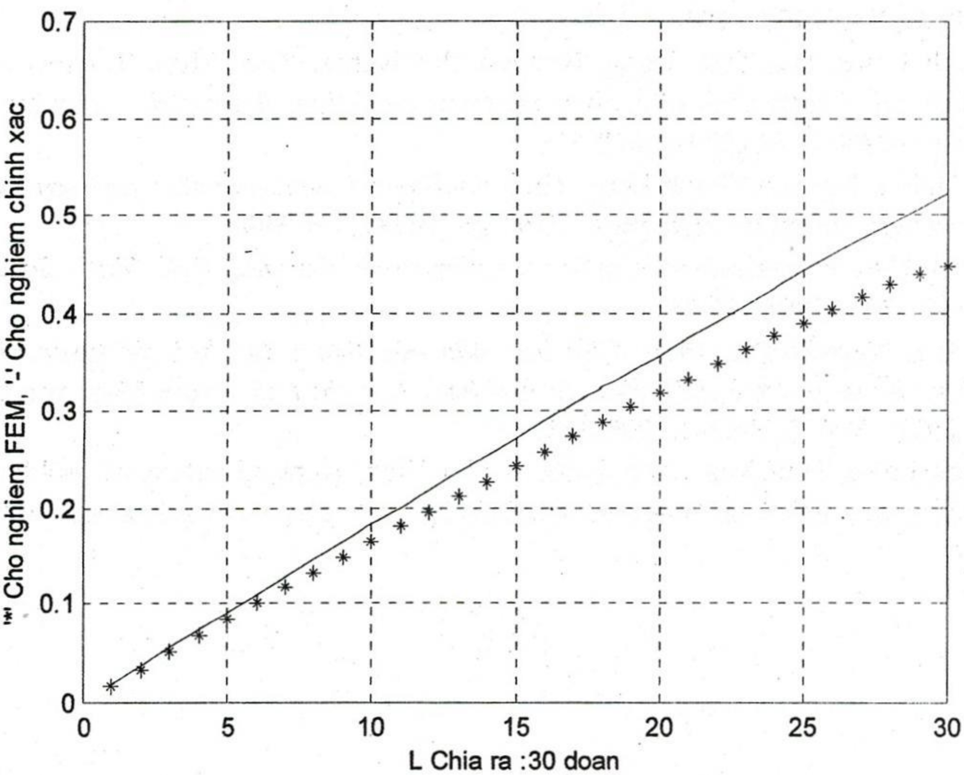
Kết quả về sai số với m = 20: $E_{20}^{(k)} \equiv \max\limits_{1 \le i \le 20} \left| c_{20i}^{(k)} - U_{ex}(x_i) \right| = 0.0834$.

Bảng B:

m	$E_m^{(k)} \equiv \max\limits_{1 \le i \le m} \left| c_{mi}^{(k)} - U_{ex}(x_i) \right|$
5	0.1567
10	0.1078
15	0.0916
20	0.0834
30	0.0753
50	0.0688


'*' Cho nghiem FEM, '-' Cho nghiem chinh xac
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
L Chia ra :20 doan

Hình 1.


'*' Cho nghiem FEM, '-' Cho nghiem chinh xac
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0 5 10 15 20 25 30
L Chia ra :30 doan

Hình 2.

A NUMERICAL METHOD FOR SOLVING NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM

Nguyen Phu Vinh

ABSTRACT: In this paper, a numerical algorithm for solving nonlinear boundary value problem is formulated. This method is basically a finite element method associated with the Newton- Raphson scheme. Numerical example is provided to show the effectiveness of the algorithm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Trần Văn Lăng, *Sử dụng phương pháp số vào một số bài toán Cơ học*, Luận án tiến sĩ, *Đại học Tổng hợp Tp. HCM*. 1995.

[2] Nguyen Thanh Long, Tran Van Lang, *The problem of buckling of a nonlinearly elastic bar immersed in a fluid, Vietnam J. Math.* 24 (1996), 131-142.

[3] Nguyen Thanh Long, Bui Tien Dung, Tran Minh Thuyet, *A nonlinear boundary value problem for nonlinear ordinary differential operator in weighted Sobolev spaces, Z. Anal. Anw.* 19 (2000), No.4, 1035-1046.

[4] Nguyen Thanh Long, Bui Tien Dung, Nguyen Hoi Nghia, Tran Minh Thuyet, *On a nonlinear boundary value with a mixed nonhomogeneous condition: Asymptotic behavior of a solution, Demonstratio Math.* 34 (2001), 609-618.

[5] Nguyen Hoi Nghia, Nguyen Thanh Long, *On a nonlinear boundary value problem with a mixed nonhomogeneous condition, Vietnam J. Math.* 26 (1998), 301-309 .

[6] M.Tucsnak, *Buckling of nonlinearly elastic rods immersed in a fluid*, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S.Roumanie*. 33 (1989),173-181.

[7] Trần Văn Lăng, Nguyễn Phú Vinh, *Giải bài toán uốn thanh đàn hồi phi tuyến nhúng trong một chất lỏng bằng phương pháp phần tử hữu hạn, Tạp chí Phát Triển Khoa học Công Nghệ ĐHQG Tp.HCM*, Vol. 5, No.1-2, (2002), 36-45.

[8] Nguyen Thanh Long, Tran Van Lang, Nguyen Phu Vinh, Approximation of problem of buckling of a nonlinear elastic bar immersed in a fluid by finite element method.(submitted)