MỘT ĐỊNH LÝ KHÔNG TỒN TẠI NGHIỆM DƯƠNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN $u(x) = \int_{IR^N} \frac{g(y,u(y))}{|y-x|^\sigma} dy$

Đinh Văn Ruy
Trường Cao Đẳng Công Nghiệp 4, Tp. Hồ Chí Minh,
(Bài nhận ngày 04 tháng 9 năm 2002)

TÓM TẮT: *Chúng tôi xét phương trình tích phân phi tuyến sau đây*

$$u(x) = \int_{IR^N} \frac{g(y,u(y))}{|y-x|^\sigma} dy, \ \forall x \in IR^N, \qquad (1)$$

trong đó σ là một hằng số dương cho trước và $g(y,u)$ là hàm liên tục cho trước thỏa điều kiện $g(x,u) \geq M|x|^\beta u^\alpha$, $\forall x \in IR^N$, $\forall u \geq 0$, với $\alpha, \beta \geq 0$, và $M > 0$ là các hằng số cho trước. Chúng tôi chứng minh theo cách sơ cấp rằng nếu $0 \leq \alpha \leq (\beta + N)/\sigma$, $N \geq 2$ thì phương trình (1) *không có nghiệm dương.*

1. GIỚI THIỆU

Chúng tôi xét sự không tồn tại nghiệm dương của phương trình tích phân phi tuyến

(1) $$u(x) = b_N \int_{IR^N} \frac{g(y,u(y))}{|y-x|^\sigma} dy, \ \forall x \in IR^N,$$

trong đó $b_N = 2((N-1)\omega_{N+1})^{-1}$ với ω_{N+1} là diện tích của mặt cầu đơn vị trong IR^{N+1}, $N \geq 2$; σ là một hằng số dương cho trước và $g: IR^N \times IR_+ \to IR$ là hàm liên tục cho trước thỏa điều kiện:

Tồn tại các hằng số $\alpha, \beta \geq 0$, và $M > 0$ sao cho

(2) $$g(x,u) \geq M|x|^\beta u^\alpha, \ \forall x \in IR^N, \ \forall u \geq 0,$$

và một số điều kiện phụ sau đó.

Trong trường hợp $\sigma = N-1$, $\beta = 0$, phương trình tích phân (1) được thành lập từ bài toán Neumann phi tuyến sau đây

(3) $$\Delta v = \sum_{i=1}^{N+1} v_{x_i x_i} = 0, \ x \in IR^N, \ x_{N+1} > 0,$$

(4) $$-v_{x_{N+1}}(x,0) = g(x, v(x,0)), \ x \in IR^N,$$

mà giá trị biên $u(x) = v(x,0)$ cùng với một số điều kiện phụ, là nghiệm của (1).

Trong [1] các tác giả Bunkin, Galaktionov, Kirichenko, Kurdyumov, Samarsky đã nghiên cứu bài toán (3), (4) với $N = 2$ với phương trình Laplace (3) có dạng đối xứng trục

(5) $$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{zz} = 0, \ \forall r > 0, \ \forall z > 0,$$

và với điều kiện biên phi tuyến có dạng cụ thể như sau

(6) $$-u_z(r,0) = I_0 \exp(-r^2/r_0^2) + u^\alpha(r,0), \quad \forall r \geq 0,$$

trong đó I_0, r_0, α là các hằng số dương cho trước. Bài toán (5), (6) là trường hợp dừng của bài toán liên hệ với sự đốt cháy bởi bức xạ. Trong trường hợp $0 < \alpha \leq 2$ các tác giả trong [1] đã chứng minh rằng bài toán (5), (6) không có nghiệm dương. Sau đó, kết quả nầy đã được mở rộng bởi Long, Ruy[7] cho điều kiện biên phi tuyến tổng quát

(7) $$-u_z(r,0) = g(r, u(r,0)), \ \forall r \geq 0.$$

Trong [10] Ruy, Long, Bình đã xét bài toán (3), (4) với $N = 2$ và hàm g là liên tục, không giảm và bị chặn dưới bởi một hàm lũy thừa bậc α đối với biến thứ ba và chúng tôi đã chứng minh rằng nếu $0 < \alpha \leq 2$ thì bài toán như thế không có nghiệm dương.

Trong [2-3] chúng tôi đã xét bài toán (3), (4) với $N \geq 3$. Hàm số $g : IR^N \times IR_+ \to IR_+$ là liên tục, không giảm đối với biến u, thỏa điều kiện (2) và một số điều kiện phụ. Trong trường hợp $0 \leq \alpha \leq N/(N-1)$, $N \geq 3$ chúng tôi đã chứng minh rằng bài toán (3), (4) không có nghiệm dương [2-3].

Trong [5-6] các tác giả đã chứng minh rằng bài toán (4), (5) không có nghiệm dương với

(8) $$g(x,u) = u^\alpha.$$

Trong [5] Hu và Yin đã chứng minh với $1 \leq \alpha < N/(N-1)$, $N \geq 2$ và trong [6] Hu đã chứng minh với $1 < \alpha < (N+1)/(N-1)$, $N \geq 2$.

Cũng cần chú ý rằng hàm $g(x,u) = u^\alpha$ không thỏa các điều kiện trong các bài báo [2], [7], [10].

Trong bài báo nầy, chúng tôi xét tôi xét phương trình tích phân phi tuyến (1) với $0 < \sigma < \beta + N$, $N \geq 2$. Hàm $g(x,u)$ liên tục thỏa điều kiện (2) mà (8) là một trường hợp riêng. Bằng cách xây dựng một dãy hàm thích hợp chúng tôi chứng minh rằng nếu $0 \leq \alpha \leq (\beta + N)/\sigma$, phương trình (1) không có nghiệm liên tục dương. Kết quả nầy là một sự tổng quát hóa tương đối các kết quả trong [1-10].

2. ĐỊNH LÝ VỀ SỰ KHÔNG TỒN TẠI NGHIỆM DƯƠNG

Không làm mất tính tổng quát, chúng ta có thể giả sử rằng $b_N = 1$ với việc thay đổi hằng số M trong giả thiết (2) của g.

Phương trình tích phân (1) được viết lại với $b_N = 1$:

(9) $$u(x) = Tu(x) \equiv \int_{IR^N} \frac{g(y, u(y))}{|y-x|^\sigma} dy, \ \forall x \in IR^N,$$

trong đó $0 < \sigma < \beta + N$, $N \geq 2$.

Khi đó ta có kết quả chính như sau.

Định lý. *Giả sử $g : IR^N \times IR_+ \to IR$ là hàm liên tục thỏa điều kiện:*

Tồn tại các hằng số α, $\beta \geq 0, M > 0$, $0 < \sigma < \beta + N$, $N \geq 2$ sao cho

(10) $$g(x,u) \geq M|x|^\beta u^\alpha, \ \forall x \in IR^N, \ \forall u \geq 0.$$

Nếu $0 \leq \alpha \leq (\beta + N)/\sigma$ thì phương trình tích phân (1) không có nghiệm liên tục dương.

Chú thích 1. Kết quả của định lý nầy mạnh hơn kết quả trong [2], [10] với $\sigma = N - 1$, $\beta = 0$. Thật vậy, tương ứng với cùng phương trình (9), và hàm $g(y,u)$ với các giả thiết sau đây đã dùng trong [2], [10] không cần thiết ở đây

(i) $g(y,u)$ không giảm đối với biến u, i.e.,

$$(g(y,u)-g(y,v))(u-v)\geq 0,\ \forall y\in IR^N, \forall u,v\geq 0;$$

(ii) Tích phân $\int_{R^N}\frac{g(y,0)}{(1+|y|)^{N-1}}dy$ tồn tại và dương.

Trước tiên, chúng ta cần bổ đề sau đây.

Bổ đề 1. *Với mỗi* $p\geq 0,\ q\geq 0,\ x\in IR^N$, *ta đặt* $A[p,q](x)=\int_{R^N}\frac{|y|^p(1+|y|)^{-q}}{|y-x|^\sigma}dy$.

Khi đó:

(11) $\quad A[p,q](x)=+\infty$, nếu $q-p\leq N-\sigma$,

(12) $\quad A[p,q](x)\geq (\frac{1}{N+p}+\frac{1}{q})\frac{\omega_N}{2^\sigma}\frac{|x|^{p+N-\sigma}}{(1+|x|)^q}$, *nếu* $q-p>N-\sigma$,

trong đó ω_N *là diện tích của mặt cầu đơn vị trong* IR^N.

Chú thích 2. Chứng minh của Bổ đề 1 được tìm thấy trong[8].

Chứng minh định lý. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử rằng tồn tại một nghiệm dương liên tục $u(x)$ của phương trình tích phân (9). Khi đó tồn tại $x_0\in IR^N$, sao cho $u(x_0)>0$. Vì u liên tục, nên tồn tại $r_0>0$ sao cho

(13) $\quad u(x)>\frac{1}{2}u(x_0)\equiv L$ với mọi $x\in IR^N,\ |x-x_0|\leq r_0$.

Ta suy từ (9), (13) và tính đơn điệu của toán tử tích phân rằng

(14) $\quad u(x)=Tu(x)\geq M\int_{IR^N}\frac{|y|^\beta u^\alpha(y)}{|y-x|^\sigma}dy\geq ML^\alpha\int_{|y-x_0|\leq r_0}\frac{|y|^\beta}{|y-x|^\sigma}dy,\ \forall x\in IR^N$.

Dùng bất đẳng thức

(15) $\quad |y-x|\leq|y|+|x|\leq(1+|x_0|+r_0)(1+|x|),\ \forall x,y\in IR^N, |y-x_0|\leq r_0$,

Ta thu được từ (14), (15) rằng

(16) $\quad u(x)\geq u_1(x)=m_1(1+|x|)^{-q_1},\ \forall x\in IR^N$,

trong đó

(17) $\quad q_1=\sigma,\quad m_1=\frac{ML^\alpha}{(1+|x_0|+r_0)^\sigma}\int_{|y-x_0|\leq r_0}|y|^\beta dy$.

Dùng đẳng thức (9) một lần nữa, ta suy từ (16) rằng

(18) $\quad u(x)=Tu(x)\geq M\int_{IR^N}\frac{|y|^\beta u^\alpha(y)}{|y-x|^\sigma}dy\geq Mm_1^\alpha A[\beta,\alpha q_1](x),\ \forall x\in IR^N$.

Bây giờ, ta xét các trường hợp khác nhau của α.

Trường hợp 1: $0\leq\alpha\leq(\beta+N-\sigma)/\sigma$. Ta thu được từ (11), (18) với $p=\beta,\ q=\alpha q_1=\alpha\sigma$, $q-p=\alpha\sigma-\beta\leq N-\sigma$, rằng

(19) $\quad u(x)=+\infty\quad \forall x\in IR^N$.

Điều nầy mâu thuẫn.

Trường hợp 2: $(\beta+N-\sigma)/\sigma<\alpha<(\beta+N)/\sigma$. Dùng (12) với $p=\beta, q=\alpha q_1=\alpha\sigma$, $q-p=\alpha\sigma-\beta>N-\sigma$, ta suy ra từ (18) rằng

(20) $$u(x)\ge u_2(x)=m_2|x|^{p_2}(1+|x|)^{-q_2},\ \forall x\in IR^N,$$

trong đó

(21) $$p_2=\beta+N-\sigma,\ \ q_2=\alpha q_1;\ \ m_2=Mm_1^\alpha\frac{\omega_N}{2^\sigma}\left(\frac{1}{\beta+N}+\frac{1}{q_2}\right).$$

Giả sử rằng

(22) $$u(x)\ge u_{k-1}(x)=m_{k-1}|x|^{p_{k-1}}(1+|x|)^{-q_{k-1}},\ \forall x\in IR^N.$$

Nếu $\alpha q_{k-1}-\beta-\alpha p_{k-1}>N-\sigma$, khi đó, sử dụng (9), (12) và (22), ta thu được

(23) $$u(x)=Tu(x)\ge M\int_{IR^N}\frac{|y|^\beta u^\alpha(y)}{|y-x|^\sigma}dy\ge Mm_{k-1}^\alpha A[\beta+\alpha p_{k-1},\alpha q_{k-1}](x)$$
$$\ge u_k(x)=m_k|x|^{p_k}(1+|x|)^{-q_k},\ \forall x\in IR^N,$$

trong đó các dãy $\{p_k\},\{q_k\},\{m_k\}$ được xác định bởi các công thức qui nạp sau đây

(24) $$p_k=\beta+\alpha p_{k-1}+N-\sigma,\ \ q_k=\alpha q_{k-1},\ \ m_k=\frac{M\omega_N m_{k-1}^\alpha}{2^\sigma}\left(\frac{1}{p_k+\sigma}+\frac{1}{q_k}\right),\ \ k\ge 3.$$

Từ (21), (24) ta thu được

(25) $$p_k=\begin{cases}(k-1)(\beta+N-\sigma),\text{nếu } \alpha=1,\\ \left(\dfrac{1-\alpha^{k-1}}{1-\alpha}\right)(\beta+N-\sigma),\ \text{nếu } \dfrac{\beta+N-\sigma}{\sigma}<\alpha<\dfrac{\beta+N}{\sigma},\alpha\ne 1\end{cases}$$

(26) $$q_k=\sigma\alpha^{k-1}$$

Ta suy từ (9) và (23), rằng

(27) $$u(x)\ge Mm_k^\alpha A[\beta+\alpha p_k,\alpha q_k](x),\ \forall x\in IR^N$$

Như vậy, từ (26), (27), ta chỉ cần chọn số tự nhiên $k\ge 3$ sao cho

(28) $$\alpha q_k-\beta-\alpha p_k\le N-\sigma<\alpha q_{k-1}-\beta-\alpha p_{k-1},$$

bởi vì, $A[\beta+\alpha p_k,\alpha q_k](x)=+\infty$.

Do (25), (26), (28) ta chọn k như sau

j) Nếu $\alpha=1$, ta chọn k thỏa $\sigma/(\beta+N-\sigma)\le k<1+\sigma/(\beta+N-\sigma)$,

jj) Nếu $(\beta+N-\sigma)/\sigma<\alpha<(\beta+N)/\sigma$ và $\alpha\ne 1$, ta chọn k thỏa $k_0\le k<k_0+1$, với $k_0=\dfrac{1}{\ln\alpha}\ln\left(\dfrac{\beta+N-\sigma}{\beta+N-\alpha\sigma}\right)$.

Trường hợp 3: $\alpha=(\beta+N)/\sigma$. Ở đây, chúng ta cần bổ đề sau.

Bổ đề 2. *Với* $\alpha=(\beta+N)/\sigma$, *ta xét dãy hàm* $\{v_k\}$ *sau*

(29) $$v_k(x)=\begin{cases}0, & |x|\le 1,\\ \dfrac{1}{D|x|^\sigma}\left(DC_2\ln\dfrac{1+|x|}{2}\right)^{\alpha^{k-2}}, & |x|\ge 1,\end{cases}$$

trong đó $$D=\left(\frac{M\omega_N}{\sigma 2^\sigma}\right)^{1/(\alpha-1)},\ C_2=Mm_1^\alpha\omega_N\frac{\min\{1,2^{1-\sigma}\}}{2^{\beta+N}}.$$

Khi đó ta có: $u(x) \ge v_k(x) \quad \forall x \in IR^N, \ \forall k \ge 2.$

Chú thích 3. Chứng minh của Bổ đề 2 được tìm thấy trong[9].

Chọn $x_0 \in IR^N$, với $|x_0| > 1$ sao cho $DC_2 \ln(\frac{1+|x_0|}{2}) > 1$. Áp dụng bổ đề 2, ta có

$$u(x_0) \ge v_k(x_0) = \frac{1}{D|x_0|^\sigma}\left(DC_2 \ln(\frac{1+|x_0|}{2})\right)^{\alpha^{k-2}} \to +\infty \text{ khi } k \to +\infty$$

Ta suy ra rằng $u(x_0) = +\infty$. Đó là điều mâu thuẫn. Định lý được chứng minh hoàn tất.

Hệ quả. *Giả sử các hằng số* $\beta \ge 0, \sigma > 0$ *thỏa điều kiện* $0 < \sigma < \beta + N, \ N \ge 2$. *Nếu* $0 \le \alpha \le (\beta + N)/\sigma$ *thì phương trình tích phân:*

$$u(x) = \int_{IR^N} \frac{|y|^\beta u^\alpha(y)}{|y-x|^\sigma} dy, \ \forall x \in IR^N,$$

không có nghiệm liên tục dương.

Chú thích 4. a) Trong trường hợp $\alpha = \frac{N}{\sigma}, \sigma = N-1, N = 2$, đánh giá (29) thu được ở đây đơn giản hơn trong [1], trong khi ở [1] $v_k(r)$ được cho bởi một chuỗi hàm.

b) Trong trường hợp $g(x,u)$ ta chưa kết luận về $\alpha > N/(N-1), \ N \ge 2$. Tuy nhiên, khi $g(x,u) = u^\alpha, \ N \ge 2, \ N/(N-1) \le \alpha < (N+1)/(N-1)$, B.Hu [6] đã chứng minh rằng bài toán (3), (4), (8) không có nghiệm dương. Trong trường hợp " *giới hạn* $\alpha = (N+1)/(N-1)$ ", thì nghiệm dương tồn tại (xem [4-6]).

Với $\alpha = (N+1)/(N-1)$, các tác giả trong [4] đã mô tả tất cả các nghiệm không âm không tầm thường $u \in C^2(IR_+^{N+1}) \cap C(\overline{IR_+^{N+1}})$ của bài toán

$$\begin{cases} -\Delta u = a u^{(N+3)/(N-1)} & \text{trong } IR_+^{N+1}, \\ -u_{x_{N+1}}(x',0) = b u^\alpha(x',0) & \text{trên } x_{N+1} = 0 \end{cases}$$

trong các trường hợp sau:

(i) $a > 0$ hay $a \le 0, \ b > B = \sqrt{a(1-N)/(N+1)}$,

(ii) $a = b = 0$,

(iii) $a = 0, b < 0$,

(iv) $a < 0, b = B$.

A NONEXISTENCE THEOREM FOR POSITIVE SOLUTION OF THE NONLINEAR INTEGRAL EQUATION $u(x) = \int_{IR^N} \frac{g(y,u(y))}{|y-x|^\sigma} dy$

Dinh Van Ruy

ABSTRACT: We consider the nonlinear integral equation

$$u(x) = \int_{IR^N} \frac{g(y,u(y))}{|y-x|^\sigma} dy, \ \forall x \in IR^N, \qquad (1)$$

where σ is a given positive constant and the given function $g(y,u)$ is continuous and $g(x,u) \geq M|x|^{\beta} u^{\alpha}$ $\forall x \in IR^N, \forall u \geq 0$, with some constants α, $\beta \geq 0$ and $M > 0$. By proving elementarily, we prove that if $0 \leq \alpha \leq (\beta + N)/\sigma$, $N \geq 2$, the nonlinear integral equation (1) has no positive solution.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] ***F.V. Bunkin, V.A. Galaktionov, N.A. Kirichenko, S.P. Kurdyumov, A.A. Samarsky,*** On a nonlinear boundary value problem of ignition by radiation, *J. Comp. Math. Phys.* **28** (1988), 549-559 (Russian).

[2] ***Duong Thi Thanh Binh, Tran Ngoc Diem, Dinh Van Ruy, Nguyen Thanh Long,*** On a nonexistence of positive solution of a nonlinear Neumann problem in half-space R^n_+, *Demonstratio Math.* **31** (1998), 773-782.

[3] ***Duong Thi Thanh Binh, Nguyen Thanh Long,*** On the nonexistence of positive solution of Laplace equation in half-space R^n_+ with a nonlinear Neumann boundary condition, *Demonstratio Math.* **33** (2000), 365-372.

[4] ***M. Chipot, I. Shafrir, M. Fila,*** On the solutions to some elliptic equations with nonlinear Neumann boundary conditions, *Advances in Diff. Equ.* **1** (1996), 91-110.

[5] ***B.Hu, H.M.Yin,*** The profile near blow-up time for solution of the heat equation with a nonlinear boundary condition, *Transactions of AMS.* **346** (1994), 117-135.

[6] ***B.Hu,*** Nonexistence of a positive solution of the Laplace equation with a nonlinear boundary condition, *J. Diff. and Int. Equ.* **7** (1994), 301-313.

[7] ***Nguyen Thanh Long, Dinh Van Ruy,*** On a nonexistence of positive solution of Laplace equation in upper half-space with Cauchy data, *Demonstratio Math.* **28** (1995), 921-927.

[8] ***Nguyen Thanh Long, Duong Thi Thanh Binh,*** On the nonexistence of positive solution of a nonlinear integral equation. *Demonstratio Math.* **34** (2001), 837-845.

[9] ***Nguyen Thanh Long, Dinh Van Ruy,*** On the nonexistence of positive solution of some integral equation, *Demonstratio Math.* **36**, No.2, (2003)(to appear).

[10] ***Dinh Van Ruy, Nguyen Thanh Long, Duong Thi Thanh Binh,*** On a nonexistence of positive solution of Laplace equation in upper half-space, *Demonstratio Math.* **30** (1997), 7-14.