CHỈNH HÓA NGHIỆM MỘT BÀI TOÁN NGƯỢC LIÊN QUAN ĐẾN VẤN ĐỀ THẤM HÓA CHẤT

Nguyễn Công Tâm - Khoa Toán- Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự Nhiên
Nguyễn Hội Nghĩa - Ban Đào Tạo Sau Đại học, ĐH Quốc Gia Thành phố Hồ Chí Minh
(Bài nhận ngày 05 tháng 11 năm 2001, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 04 tháng 1 năm 2002)

TÓM TẮT: Bài toán tìm nồng độ hóa chất tại màng thấm theo nồng độ được đo tại điểm cách xa màng thấm được dẫn về việc giải một phương trình tích phân Abel suy rộng. Phương trình nầy dược chính quy hóa bởi phương pháp Tikhonov với đánh giá sai số cũng được cho.

1. Đặt vấn đề

Chúng tôi xét một màng thấm đặt tại vị trí $x = 0$ của trục hoành độ Ox chia thành hai ngăn: một ngăn $x < 0$ mà hóa chất được đưa vào và một ngăn còn lại $x > 0$ là ngăn không thể tiếp cận được (có hóa chất đậm đặc rất nguy hiểm). Nồng độ hóa chất tại điểm x ở thời điểm t là một hàm số $u(x,t)$ được giả sử khuyếch tán giống như quá trình truyền nhiệt, nghĩa là $u(x,t)$ thỏa mãn phương trình truyền nhiệt sau đây mà ta giả sử hệ số truyền nhiệt bằng một:

(1.1) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x < 0,\ t > 0.$$

Giả sử tại thời điểm ban đầu, ngăn $x < 0$ không có hóa chất, nghĩa là:

(1.2) $$u(x,0) = 0\,, x < 0.$$

trong khi đó ở ngăn $x > 0$ thì có nồng độ là $u_+(t)$ là một hàm chưa biết theo thời gian t (độc lập với x).

Ta cũng giả sử rằng sự thay đổi nồng độ khi hóa chất xuyên qua một màng thấm thỏa định luật Newton về quá trình làm nguội, tức là gradient của nồng độ tỉ lệ với hiệu số của nồng độ xuyên qua màng:

(1.3) $$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = -k\big(u(0,t) - u_+(t)\big)$$

trong đó $k > 0$ là hằng số thấm[3].

Bài toán là xác định nồng độ hóa chất $u_+(t)$ trong ngăn không tiếp cận được $x > 0$ từ nồng độ hóa chất $u(x_0,t)$ đo được tại điểm cách xa màng thấm $x_0 < 0$.

Do đó, chúng tôi chia thành 2 bài toán như sau:

Bài toán 1: Xác định $u_+(t)$ từ $u(0,t)$.

Bài toán 2: Xác định $u(0,t)$ từ $u(x_0,t)$.

Bài toán 1 đã được xét trong [7].

Trong bài nầy chúng tôi xét bài toán 2: Trước hết chúng tôi thiết lập một phương trình tích phân Abel suy rộng liên hệ đến $u(0,t)$ và $u(x_0,t)$, trong đó $u(0,t)$ là ẩn hàm và $u(x_0,t)$ là hàm biết trước do đo đạc. Bài toán xác định $u(0,t)$ từ $u(x_0,t)$ là bài toán không chỉnh. Để giải bài toán như vậy chúng tôi dùng phép chỉnh Tikhonov thông qua định lý Lax-Milgram. Đánh giá sai số thu được là bậc ½ so với sai số đo đạc dữ kiện $u(x_0,t)$ theo chuẩn $L^2(0,1)$. Sau đó một thuật toán xấp xỉ liên tiếp theo nguyên lý ánh xạ co như sau cũng được nghiên cứu. Kết quả thu được ở đây đã tổng quát hóa các kết quả trong [2,4, 5, 6,7].

2. Thiết lập phương trình tích phân

Xét biến đổi Laplace của hàm $u(x,t)$ theo thời gian t :

(2.1) $$\hat{u}(x,p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(x,t)dt.$$

Từ phương trình (1.1) và điều kiện đầu (1.2), ta thu được:

(2.2) $$\hat{u}(x,p) = \hat{u}(0,p)e^{x\sqrt{p}}$$

Sử dụng định lý về tích chập ta thu được biến đổi Laplace ngược của (2.2) là

(2.3) $$u(x,t) = \frac{-x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-x^2/4(t-\tau)}\, u(0,\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau.$$

Trong (2.3), cho $x \to x_0$ ta thu được

(2.4) $$\int_0^t \frac{e^{-x_0^2/4(t-\tau)}\, u(0,\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau = \frac{-2\sqrt{\pi}}{x_0} u(x_0,t).$$

Phương trình (2.5) được viết lại như sau:

(2.5) $$\int_0^t \frac{K(t,\tau)u(0,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = f(t)$$

trong đó

(2.6) $$K(t,\tau) = \frac{e^{-x_0^2/4(t-\tau)}}{t-\tau},$$

(2.7) $$f(t) = \frac{-2\sqrt{\pi}}{x_0} u(x_0,t).$$

Chú thích 1.

i) (2.5) là phương trình tích phân Abel suy rộng(loại 1) với $\alpha = 1/2$ (xem [1-2]).

ii) Ở đây nhân $K(t,\tau)$ trong phương trình (2.5) không thỏa điều kiện đã nêu trong [2], tức là $K(t,t)=1$. Như vậy phương pháp giải trong [2] không sử dụng được với $K(t,\tau)$ cụ thể như (2.6).

3. Khảo sát và chính qui hóa phương trình tích phân (2.5)

Đặt

(3.1) $$(Av)(t)=\int_0^t \frac{K(t,\tau)v(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau$$ với nhân $K(t,\tau)$ như trong (2.6).

Ta có bổ đề sau.

Bổ đề 1. *A cho bởi (3.1) xác định một toán tử tuyến tính liên tục từ $L^2(0,1)$ vào $L^2(0,1)$. Hơn nữa ta cũng có*

(3.2) $$\|A\|\le 8e^{-1}x_0^{-2}.$$

Chứng minh. Chú ý rằng

(3.3) $$\frac{e^{-x_0^2/4t}}{t}\le\frac{4}{ex_0^2}\qquad \forall t>0.$$

Vậy

(3.4) $$0<K(t,\tau)=\frac{e^{-x_0^2/4(t-\tau)}}{t-\tau}\le\frac{4}{ex_0^2}\qquad \forall t,\tau\ ,\ \ 0\le\tau<t.$$

Do đó

(3.5) $$|(Av)(t)|^2=\left|\int_0^t\frac{K(t,\tau)v(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\right|^2\le\left(\frac{4}{ex_0^2}\right)^2\left|\int_0^t\frac{|v(\tau)|}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\right|^2$$

Nhờ bất đẳng thức Cauchy-Schwartz

(3.6) $$\left|\int_0^t\frac{|v(\tau)|}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\right|^2\le 2\sqrt{t}\int_0^t\frac{v^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau.$$

Sau khi thay đổi thứ tự biến lấy tích phân ta thu được

(3.7) $$\|Av\|^2_{L^2(0,1)}=\int_0^1|(Av)(t)|^2dt\le 2\left(\frac{4}{ex_0^2}\right)^2\int_0^1 dt\int_0^t\frac{v^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau$$

$$= 2\left(\frac{4}{ex_0^2}\right)^2 \int_0^1 v^2(\tau)d\tau \int_\tau^1 \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} dt$$

$$= 4\left(\frac{4}{ex_0^2}\right)^2 \int_0^1 \sqrt{1-\tau}\; v^2(\tau)d\tau$$

$$\le \left(\frac{8}{ex_0^2}\right)^2 \int_0^1 v^2(\tau)d\tau = \left(\frac{8}{ex_0^2}\right)^2 \|v\|^2_{L^2(0,1)}$$

Vậy $\|A\| \le 8e^{-1}x_0^{-2}$.

Bổ đề 1 được chứng minh.

Chú thích 2. Đánh giá (3.2) cho thấy nếu x_0 cách xa màng thấm (x_0^2 lớn) thì $\|A\|$ bé.

Ta thành lập giả thiết sau:

(H1) $f_0(.) = \dfrac{-2\sqrt{\pi}}{x_0} u(x_0,.) \in L^2(0,1)$

Ta giả sử rằng $v_0(.) = u(0,.) \in L^2(0,1)$ là nghiệm chính xác của phương trình

(3.8) $(Av_0)(t) \equiv \displaystyle\int_0^t \frac{K(t,\tau)v_0(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = f_0(t) \equiv \frac{-2\sqrt{\pi}}{x_0} u(x_0,t)$.

thỏa thêm một số điều kiện nào đó mà ta sẽ đặt sau.

Như chúng ta đã biết, bài toán không chỉnh (1.1)-(1.3) đưa đến việc giải phương trình tích phân Abel suy rộng loại một (3.8) mà cũng là bài toán không chỉnh [1,2,3,7]. Vì vậy, sự sai lệch nhỏ của dữ kiện đo $f_0(.) = \dfrac{-2\sqrt{\pi}}{x_0} u(x_0,.)$ (theo một chuẩn thích hợp) sẽ kéo theo sự thay đổi lớn của nghiệm tương ứng của phương trình tích phân Abel (3.8). Vì vậy phương trình (3.8) cần phải chỉnh hóa.

Giả sử rằng $\dfrac{-x_0}{2\sqrt{\pi}} f_\varepsilon(t)$ là giá trị đo của $u(x_0,t)$ tại mỗi thời điểm $t > 0$ với một sai số $\dfrac{2\sqrt{\pi}}{-x_0}\varepsilon$ (theo chuẩn trong $L^2(0,1)$, $\varepsilon > 0$), tức là

(3.9) $\|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(0,1)} = \left\| f_\varepsilon(.) - \dfrac{-2\sqrt{\pi}}{x_0} u(x_0,.)\right\|_{L^2(0,1)} < \varepsilon$.

Trong phần sau đây ta sẽ xấp xỉ bài toán (3.8) bởi họ các bài toán biến phân sau:

Bài toán biến phân (P_ε), $\varepsilon > 0$: Tìm $v_\varepsilon \in L^2(0,1)$ sao cho

(3.10) $\varepsilon \displaystyle\int_0^1 v_\varepsilon(t)w(t)dt + \int_0^1 Av_\varepsilon(t)Aw(t)dt = \int_0^1 f_\varepsilon(t)Aw(t)dt$, $\forall w \in L^2(0,1)$.

Khi đó do định lý Lax- Milgram ta có:

Định lý 1. *Với mỗi* $\varepsilon > 0$ *bài toán biến phân (3.10) có duy nhất một lời giải* $v_\varepsilon \in L^2(0,1)$. *Hơn nữa, lời giải nầy ổn định đối với* f_ε.

Kết quả sau đây cho một đánh giá sai số của lời giải v_ε và v_0 theo sai số ε mà chứng minh của nó tương tự như [4,6,7].

Định lý 2. *Giả sử rằng lời giải chính xác* $v_0 \in L^2(0,1)$ *của phương trình*

(3.11) $\quad Av_0 = f_0$ *trong* $L^2(0,1)$,

thỏa điều kiện

(3.12) $\quad \exists g \in L^2(0,1): \int_0^1 v_0(t)w(t)dt = \int_0^1 g(t)Aw(t)dt, \quad \forall w \in L^2(0,1).$

Giả sử $f_\varepsilon \in L^2(0,1)$ *thỏa (3.9). Khi đó lời giải* $v_\varepsilon \in L^2(0,1)$ *của bài toán biến phân (3.10) thỏa một đánh giá sai số:*

(3.13) $$\|v_\varepsilon - v_0\|_{L^2(0,1)} < C\sqrt{\varepsilon},$$

trong đó

(3.14) $$C = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \|g\|^2_{L^2(0,1)}\right)^{1/2}.$$

Chú thích 3.

i) Việc tìm lời giải $v_\varepsilon \in L^2(0,1)$ bài toán biến phân (3.10) tương đương với việc giải phương trình toán tử

(3.15) $$\varepsilon v_\varepsilon + A^* A v_\varepsilon = A^* f_\varepsilon,$$

hoặc có biểu diễn tường minh bằng công thức

(3.16) $$v_\varepsilon = (\varepsilon I + A^* A)^{-1} A^* f_\varepsilon,$$

trong đó I là toán tử đồng nhất và $A^*: L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ là toán tử liên hợp của A, tức là

(3.17) $$(A^* h)(\tau) = \int_\tau^1 \frac{e^{-x_0^2/4(t-\tau)} h(t)}{(t-\tau)^{3/2}} dt, \quad \forall h \in L^2(0,1).$$

ii) Chú rằng $\varepsilon I + A^* A$ khả đảo $\forall \varepsilon > 0$, nhưng chúng ta rất khó khăn trong việc tính toán toán tử $(\varepsilon I + A^* A)^{-1}$, do đó để tính v_ε theo công thức tường minh (3.16) không dễ dàng. Để khắc phục điều nầy ta có thể viết phương trình (3.15) dưới một dạng khác như sau:

(3.18) $v_\varepsilon = v_\varepsilon - \beta(\varepsilon v_\varepsilon + A^* A v_\varepsilon - A^* f_\varepsilon) \equiv T v_\varepsilon$, với mọi số thực $\beta \neq 0$.

Khi đó ta có $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ là toán tử co với việc chọn số thực $\beta \neq 0$ một thích hợp. Cụ thể ta có:

Định lý 3. *Chọn*

(3.19) $$\beta = \varepsilon\left(\varepsilon + \frac{64}{e^2 x_0^4}\right)^{-2}.$$

Khi đó $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ là toán tử co với hệ số co

(3.20) $$k = \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon e^2 x_0^4}{\varepsilon e^2 x_0^4 + 64}\right)^2} < 1,$$

nghĩa là

$$\|Tu - Tv\|_{L^2(0,1)} \leq k\|u - v\|_{L^2(0,1)}, \forall u, v \in L^2(0,1).$$

Chú thích 4. Với việc chọn β như trong định lý 3 ta sẽ tính v_ε theo một thuật toán xấp xỉ liên tiếp theo nguyên lý ánh xạ co như sau:

(3.21) $$v_\varepsilon^{(m)} = T v_\varepsilon^{(m-1)} = \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon e^2 x_0^4}{\varepsilon e^2 x_0^4 + 64}\right)^2}\, v_\varepsilon^{(m-1)} - \frac{\varepsilon}{\left(\varepsilon + \frac{64}{e^2 x_0^4}\right)^2} A^*(A v_\varepsilon^{(m-1)} - f_\varepsilon), \quad m \geq 1.$$

Bước lặp ban đầu được chọn

(3.22) $$v_\varepsilon^{(0)} \equiv 0.$$

Khi đó

(3.23) $$\left\|v_\varepsilon^{(m)} - v_\varepsilon\right\|_{L^2(0,1)} \leq C_\varepsilon k^m \quad \text{với mọi } m \geq 1,$$

trong đó

(3.24) $C_\varepsilon = \dfrac{\beta}{1-k}\|A^* f_\varepsilon\|_{L^2(0,1)}$, với β và k cho bởi (3.19), (3.20).

Định lý 4. *Sai số giữa $v_\varepsilon^{(m)}$ và v_0 được đánh giá như sau:*

(3.25) $$\left\|v_{\varepsilon}^{(m)} - v_0\right\|_{L^2(0,1)} \leq C_{\varepsilon}k^m + C\sqrt{\varepsilon}\ ,$$

với C *cho bởi (3.14).*

Định lý 5. *Với* $\varepsilon > 0$ *đủ nhỏ,* β, k *và* C_{ε} *lần lượt cho bởi (3.17),(3.18), (3.22).*

Chọn số tự nhiên $m_{\varepsilon} \geq \dfrac{\ln(\sqrt{\varepsilon}/C_{\varepsilon})}{\ln k}$, *khi đó ta có*

(3.26) $$\left\|v_{\varepsilon}^{(m)} - v_0\right\|_{L^2(0,1)} \leq (1+C)\sqrt{\varepsilon}\ ,$$ *với* C *cho bởi (3.14).*

Chú thích 5. Trong [5] đã dùng một thuật toán số tương tự để tính trên các ví dụ cụ thể.

ON THE REGULARIZATION OF AN INVERSE PROBLEM CONCERNED TO PROBLEM OF CHEMICAL PENETRATION

Nguyen Cong Tam - Department of Mathematics & Informatics
University of Natural Sciences – VNU-HCM
Nguyen Hoi Nghia – Vietnam National University Ho Chi Minh City
(Received 05 November 2001, Revised 04 January 2002)

ABSTRACT: The problem finding the concentration of the chemical in the inaccessible region in term of the concentration of the chemical at the penetration membrane is deduced the solving an Abel integral equation of the first kind. This equation is regularized by Tikhonov method with error estimates given.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] *R. Gorenflo, S. Vessella.,* Abel integral equation: Analysis and applications., *Lecture Notes in Mathematics, Springer- Verlag Berlin, Heidelberg, New York,* 1991.
[2] *D.D. Ang, R. Gorenflo, D.D.Hai.,* Regularization of a Generalized Abel integral equation, *J. Applicable Anal.,* 45, (1992), 321-332.
[3] *C.W. Groetsch.,* Inverse problems in the mathematics Sciences, *Wieweg, Brannschweig.*1993.
[4] *Nguyễn Hội Nghĩa, Nguyễn Công Tâm.,* Inversion of Laplace transform as a moment problem., *Proc. of Ho Chi Minh city mathematics Consortium. First Conference.* Vol.1, (1993), 61-65.
[5] *Nguyễn Hội Nghĩa, Nguyễn Công Tâm, Trần Văn Lăng.,* Lời giải số của biến đổi Laplace ngược., *Tạp chí "Khoa học & Công nghệ" của 4 trường Đại học Kỹ thuật.* Số 7, (1994), 8-12.
[6] *Nguyễn Công Tâm, Nguyễn Hội Nghĩa.,* Xấp xỉ ổn định lời giải của bài toán Cauchy cho phương trình Poisson trong hình tròn đơn vị., *Tạp chí "Khoa học & Công nghệ" của 4 trường Đại học Kỹ thuật.* Số 9, (1995), 82-84.
[7] *Nguyễn Công Tâm, Võ Xuân Ngọc.,* Về sự chính quy hóa của một phương trình tích phân Abel loại một liên quan đến bài toán thấm hóa chất., *Tạp chí "Khoa học & Công nghệ" của 4 trường Đại học Kỹ thuật.* Số 13, (1997), 61-63.