VỀ MỘT HỆ PHƯƠNG TRÌNH HÀM TUYẾN TÍNH

Nguyễn Hội Nghĩa
Đại học Quốc Gia TP. Hồ Chí Minh.
Nguyễn Kim Khôi
Phân Viện Công Nghệ Thông Tin TP. Hồ Chí Minh.

(Bài nhận ngày 25/08/2000)

TÓM TẮT : *Xét hệ phương trình hàm tuyến tính*

$$(1)\qquad f_i(x)=\sum_{k=1}^{m}[a_{ik}f_1(A_{ik}(x))+b_{ik}f_2(B_{ik}(x))]+g_i(x),\qquad x\in I\subset R,\ \forall i=1,2$$

trong đó I là một khoảng bị chặn hay không bị chặn của R. Các hàm cho trước g_i : $I\to R$, $A_{ik},B_{ik}:I\to I$, $1\le k\le m$, $i=1,2$ là liên tục cho trước; $f_i(x)$, $i=1,2$ là các ẩn hàm. Chúng tôi chứng minh sự tồn tại và duy nhất lời giải của hệ (1). Kết quả tính toán bằng số minh họa kèm theo.

1. GIỚI THIỆU

Trong bài này, chúng tôi nghiên cứu hệ phương trình hàm sau đây

$$f_i(x)=\sum_{k=1}^{m}[a_{ik}f_1(A_{ik}(x))+b_{ik}f_2(B_{ik}(x))]+g_i(x),\quad x\in I\subset R,\ \forall\, i=1,2 \qquad (1.1)$$

trong đó I là một khoảng bị chặn hay không bị chặn của R. Các hàm cho trước g_i : $I\to R, A_{ik},B_{ik}:I\to I$, $1\le k\le m$, $i=1,2$ là liên tục cho trước; $f_1(x),f_2(x)$ là các ẩn hàm.

Trong [1] các tác giả C.Q.Wu, Q.W.Xuan, D.Z. Zhu đã nghiên cứu hệ (1) với I=[-b, b], m = 2 ; A_{ik}, B_{ik} là các nhị thức bậc nhất thỏa điều kiện $A_{ik}(x),B_{ik}(x)\in I,\forall x\in I$. Cũng trong [1] các tác giả đã xấp xỉ lời giải của hệ (1.1) bởi một dãy qui nạp hội tụ đều. Hơn nữa lời giải thu được cũng ổn định đối với các hàm $g_i(x)$.Một trường hợp riêng của(1.1) đã có áp dụng vào việc giải hệ phương trình hyperbolic [1].

Trường hợp m = 1 , I = [a, b], $g_i(x) = 0$, các tác giả trong [2], [3], [4] đã khảo sát sự tồn tại và duy nhất lời giải trong không gian hàm BC[a, b] của một phương trình hàm sau:

$$f(x)=a(x,f(S(x)))\qquad (1.2)$$

Trong[5],[6],[7] ,chúng tôi xét hệ phương trình hàm tuyến tính(1.1).Bằng cách sử dụng định lý điểm bất động Banach, chúng tôi thu được định lý tồn tại, duy nhất và ổn định của lời giải của hệ (1.1) đối với các hàm $g_i(x)$, trong đó I = [a, b] hoặc I làkhoảng không bịchặn của **R**. Trong trường hợp A_{ik},B_{ik} là các nhị thức bậc nhất và $g_i\in C^r(I)$, I = [-b, b] chúng tôi thu được một khai triển Maclaurin của lời giải của hệ (1.1) đến cấp r. Hơn nữa, nếu $g_i(x)$ là các đa thức bậc r thì lời giải của hệ (11.) cũng là đa thức bậc r. Gần đây, một số kết quả của chúng tôi trong [7] cũng đã phát triển cho hệ phương trình hàm với miền nhiều chiều (Xem [8]).

Bài báo gồm 2 phần .Trong phần 1, trình bày một số định lý tồn tại, duy nhất và ổn định của lời giải cho hệ phương trình hàm dạng (1.1). Trong phần 2 là phần khảo sát thuật giải số dựa vào thuật giải xấp xỉ liên tiếp theo nguyên tắc ánh xạ co, kết hợp với xấp xỉ bởi các hàm spline bậc nhất. Kết quả thu được đã tổng quát hóa các kết quả trong [1-6], và một phần kết quả nầy đã được công bố trong [7],[8].Cuối cùng làphần thuật toán số trên các ví dụ cụ thể.

2. LỜI GIẢI CỦA HỆ (1)

Ta ký hiệu I = [a, b] hay I là khoảng không bị chặn trong R.

- Với I = [a, b], ký hiệu $V = C(I; R^2)$ là không gian Banach các hàm $f = (f_1, f_2)$ $: I \to R^2$ liên tục trên I đối với chuẩn

$$\|f\|_V = \sup_{x \in I} \|f(x)\|, \qquad (2.1)$$

trong đó $\|f(x)\| = |f_1(x)| + |f_2(x)|$, $f = (f_1, f_2) \in V$.

- Với I ⊂ R là một khoảng không bị chặn, ta ký hiệu $V = C_b(I; R^2)$ là không gian Banach các hàm $f = (f_1, f_2) : I \to R^2$ liên tục, bị chặn trên I đối với chuẩn (2.1).

Ta thành lập các giả thiết sau:

(G1) $g = (g_1, g_2) \in V$,

(G2) $A_{ik}, B_{ik} : I \to I$, $1 \le k \le m, i = 1,2$ là các hàm liên tục ,

(G3) $\alpha = \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{m} (|a_{ik}| + |b_{ik}|) < 1$.

Ta có các định lý tồn tại, duy nhất và ổn định sau:

Định lý 1: *Dưới các giả thiết* **(G1) –(G3)**, *tồn tại duy nhất một hàm $f = (f_1, f_2) \in V$ là lời giải của hệ (1.1). Hơn nữa, lời giải hệ (1.1) cũng ổn định đối với g trong V.*

Chứng minh: Ta viết hệ (1.1) dưới dạng phương trình toán tử trong V như sau:

$$f = Af, \qquad (2.2)$$

trong đó $f = (f_1, f_2)$, $Af = ((Af)_1, (Af)_2)$, với

$$(Af)_i(x) = \sum_{k=1}^{m} [a_{ik} f_1(A_{ik}(x)) + b_{ik} f_2(B_{ik}(x))] + g_i(x), \ x \in I, \ \forall\, i = 1,2. \qquad (2.3)$$

Từ các giả thiết **(G1) –(G3)**, ta nghiệm lại không khó khăn rằng

+ $Af \in V$ với mọi $f \in V$.

+ $\left\|Af - A\widetilde{f}\right\|_V \le \alpha \left\|f - \widetilde{f}\right\|_V$ với mọi $f, \widetilde{f} \in V$.

Do đó, sử dụng định lý điểm bất động Banach, ta có duy nhất một $f \in V$ sao $f = Af$. Hơn nữa lời giải thu được cũng ổn định đối với g. Thật vậy, coi $f, \widetilde{f} \in V$ là hai lời giải của (2.2) tương ứng với $g, \widetilde{g} \in V$, lần lượt. Đánh giá tương tự ta có

$$\left\|f - \widetilde{f}\right\|_V \le \frac{1}{1-\alpha}\left\|g - \widetilde{g}\right\|_V . \quad ■(2.4)$$

Chú thích 1: Định lý 1 cho một thuật giải xấp xỉ liên tiếp

$$f^{(p)} = Af^{(p-1)}, p = 1,2,..., f^{(0)} \in V . \quad (2.5)$$

Khi đó dãy $\{f^{(p)}\}$ hội tụ trong V về lời giải f của (2.2) và có một đánh giá sai số

$$\left\|f^{(p)} - f\right\|_V \le \frac{\alpha^p}{1-\alpha}\left\|f^{(0)} - Af^{(0)}\right\|_V , \ \forall p = 1,2,... \ ■ \quad (2.6)$$

Chú thích 2 :

(i) Trong trường hợp A_{ik}, B_{ik} là nhị thức bậc nhất theo x, định lý 1 vẫn đúng với $I = R$.

(ii) Trong trường hợp I = [-b, b] và A_{ik}, B_{ik} là nhị thức bậc nhất theo x như sau

$$\begin{cases} A_{ik}(x) = c_{ik}x + d_{ik}, \\ B_{ik}(x) = \widetilde{c}_{ik}x + \widetilde{d}_{ik} \end{cases} \quad (2.7)$$

trong đó nếu các số thực $c_{ik}, d_{ik}, \widetilde{c}_{ik}, \widetilde{d}_{ik}$ thỏa mãn các điều kiện sau :

$$|c_{ik}| < 1, \ |\widetilde{c}_{ik}| < 1 \qquad , \forall\ i = 1,2\ , \forall\ k=1,...,m, \qquad (2.8)$$

$$\max_{\substack{1\le k\le m \\ i=1,2}} \frac{|d_{ik}|}{1-|c_{ik}|} \le b, \quad \max_{\substack{1\le k\le m \\ i=1,2}} \frac{|\widetilde{d}_{ik}|}{1-|\widetilde{c}_{ik}|} \le b. \qquad (2.9)$$

Khi đó giả thiết (G2) đúng. ■

Ta có kết quả sau đây suy từ định lý 1.

Định lý 2: *Giả sử I = [-b, b] và các số thực các số thực* $c_{ik}, d_{ik}, \widetilde{c}_{ik}, \widetilde{d}_{ik}$ *thỏa mãn các điều kiện* (G3), *(2.8), (2.9). Khi đó với mỗi* $g \in V$, *tồn tại duy nhất* $f \in V$ *là lời giải của hệ (2.2). Hơn nữa, lời giải hệ (1.1) cũng ổn định đối với g trong* V. ■

3. THUẬT GIẢI SỐ

Trong phần này, ta xét I = [-1, 1] (b=1), và **(G1)-(G3)** thỏa đúng. Ta dựa vào thuật giải (2.5) ,ta viết lại

$$f_i^{(p)}(x) = \sum_{k=1}^{m}[a_{ik} f_1^{(p-1)}(A_{ik}(x)) + b_{ik} f_2^{(p-1)}(B_{ik}(x))] + g_i(x),\ x \in I,\ \forall\ i = 1,2. \quad (3.1)$$

$$f_i^{(0)}(x) = 0 \qquad (3.2)$$

Khi đó dãy lặp $\{f^{(p)}\}$ hội tụ trong V về lời giải f của hệ (1.1) và có đánh giá sai số

$$(3.3) \qquad \left\|f^{(p)} - f\right\|_V \le \frac{\alpha^p}{1-\alpha}\|g\|_V,\ \forall p = 1,2,...$$

Dựa vào (3.1), ta tính toán các giá trị $f_i^{(p)}(x_j) = f_{ij}^{(p)}$ tại một số điểm nút rời rạc.

$$x_j = -1 + j.\Delta x,\ \ 0 \le j \le N,\ \ \Delta x = 2/N. \qquad (3.4)$$

Sau đó, tạ nội suy các giá trị $f_i^{(p)}(x_j) = f_{ij}^{(p)}$ tại các điểm nút (3.4) bởi các hàm spline bậc nhất trên [-b, b] dựa vào các điểm nút $x_0, x_1, ..., x_N$.

$$f_i^{(p)}(x) = \sum_{j=0}^{N} f_{ij}^{(p)} w_j(x) \qquad (3.5)$$

trong đó các hàm $w_0(x)$, $w_1(x)$, ..., $w_N(x)$ được xác định như sau:

$$w_j(x) = \begin{cases} (x - x_{j-1})/\Delta x, & x_{j-1} \le x \le x_j, \\ (x_{j+1} - x)/\Delta x, & x_j \le x \le x_{j+1}, \\ 0 & x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}], \\ & ,1 \le j \le N-1 \end{cases} \qquad (3.6)$$

$$w_0(x) = \begin{cases} (x_1 - x)/\Delta x, & -b \le x \le x_1, \\ 0, & x_1 \le x \le b, \end{cases} \qquad (3.7)$$

$$w_N(x) = \begin{cases} (x - x_{N-1})/\Delta x, & x_{N-1} \le x \le b, \\ 0, & -b \le x \le x_{N-1}. \end{cases} \qquad (3.8)$$

Từ đây, ta xác định $f_{ij}^{(p)}$ bằng quy nạp ở bước lặp p=1,2,...

$$f_{ij}^{(0)} = 0 \qquad (3.9)$$

$$f_{ij}^{(p)} = \sum_{k=1}^{m}[a_{ik}\sum_{l=0}^{N} f_{1l}^{(p-1)} w_l(A_{ik}(x_j)) + b_{ik}\sum_{l=0}^{N} f_{2l}^{(p-1)} w_l(B_{ik}(x_j))] + g_i(x_j), \qquad (3.10)$$

$$i = 1,2, \qquad 0 \le j \le N, \qquad p = 1,2,...$$

Ta áp dụng thuật giải (3.9),(3.10) trên ví dụ cụ thể sau:

Ví dụ : Xét $I=[-1,1]$

$$\begin{cases} f_1(x)=\dfrac{1}{100}f_1(\dfrac{x}{2})+\dfrac{1}{200}f_1(\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{2})+\dfrac{1}{100}f_2(\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4})+\dfrac{1}{100}f_2(\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{4})+g_1(x), \\ f_2(x)=\dfrac{1}{100}f_1(\dfrac{x}{4})+\dfrac{1}{200}f_1(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3})+\dfrac{1}{100}f_2(\dfrac{x}{2})+\dfrac{1}{200}f_2(\dfrac{x}{4}+\dfrac{3}{4})+g_2(x), \end{cases} \quad (3.11)$$

trong đó

$$\begin{cases} g_1(x)=\dfrac{1}{400}\left[\dfrac{596}{3}x-\dfrac{1}{2}-\dfrac{(x+1)^2}{16}-\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{4}\right)^2\right], \\ g_2(x)=\dfrac{1}{800}\left[-2x-\dfrac{2}{3}-\dfrac{399}{2}x^2-\left(\dfrac{x+3}{4}\right)^2\right]. \end{cases} \quad (3.12)$$

Các số thực $a_{ik},b_{ik},c_{ik},d_{ik},\widetilde{c}_{ik},\widetilde{d}_{ik}$ thoả các giả thiết **(G3)**, (2.8), (2.9).

Lời giải chính xác của (3.11), (3.12) là

$$f_1^{ex}(x)=\frac{x}{2} \;;\; f_2^{ex}(x)=\frac{x^2}{4} \quad (3.13)$$

Tính toán bởi thuật giải (3.9), (3.10) với các bước lặp p=1,2,... sao cho

$$\max_{\substack{i=1,2\\ 0\le j\le N}}\left|f_{ij}^{(p)}-f_{ij}^{(p-1)}\right|<10^{-6}. \quad (3.14)$$

Sau đó, cho N tăng dần lần lượt với N=5,10,15,20,...

Bảng 1 và 2 sau đây cho kết quả so sánh các giá trị tính toán $f_{ij}^{(p)}=f_i^{(p)}(x_j)$ với các giá trị chính xác $f_i^{(ex)}(x_j)$ tại các điểm nút $x_j, 0\le j\le N$ với i =1,2.

Bảng 3,4 cho thấy các sai số thay đổi theo số nút N tăng dần.

Bảng 1: N=5

j	$f_{1j}^{(p)}$	$f_1^{(ex)}(x_j)$	$E_{1j}=\left\|f_{1j}^{(p)}-f_1^{(ex)}(x_j)\right\|$
0	-0.499812845532	-0.5000000000	0.000187154468
1	-0.299827317055	-0.3000000000	0.000172682945
2	-0.099979984082	-0.1000000000	0.000020015918
3	0.100162394744	0.1000000000	0.000162394744
4	0.300198768451	0.3000000000	0.000198768451
5	0.500095930238	0.5000000000	0.000095930238

$\max\limits_{0\le j\le N} E_{1j}=1.99E-04$

Bảng 2: N=5

j	$f_{2j}^{(p)}$	$f_2^{(ex)}(x_j)$	$E_{2j} = \left\|f_{2j}^{(p)} - f_2^{(ex)}(x_j)\right\|$
0	0.250114518839	0.2500000000	0.000114518839
1	0.090077538333	0.0900000000	0.000077538333
2	0.010115787350	0.0100000000	0.000115787350
3	0.010128752052	0.0100000000	0.000128752052
4	0.090116595909	0.0900000000	0.000116595909
5	0.250078954427	0.2500000000	0.000078954427

$\max_{0 \le j \le N} E_{2j} = 1.29E-04$

	Bảng 3	**Bảng 4**
N	$e_1 = \max_{0\le j\le N} E_{1j}$	$e_2 = \max_{0\le j\le N} E_{2j}$
5	1.99E-04	1.29E-04
10	5.02E-05	3.84E-05
15	2.27E-05	1.44E-05
20	1.28E-05	8.86E-06

ON A LINEAR FUNCTIONAL EQUATION SYSTEM

Nguyen Hoi Nghia - Nguyen Kim Khoi

ABSTRACT : *We consider the system of linear functional equations*

$$(1) \qquad f_i(x) = \sum_{k=1}^{m}[a_{ik} f_1(A_{ik}(x)) + b_{ik} f_2(B_{ik}(x))] + g_i(x), \quad x \in I \subset R, \ \forall i = 1,2$$

where I *is a bounded or unbounded interval,* $g_i : I \to R$, $A_{ik}, B_{ik} : I \to I$, $1 \le k \le m$, $i = 1,2$ *are given continuous functions. We prove the existence and uniqueness of solution of the sytem (1). Numerical results are given.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] C. Q. Wu, Q. W. Xuan, D. Y. Zhu, *The system of the functional equations and the fourth problem of hyperbolic system, SEA. Bull. Math.* 15, (1991) , 109-115.

[2] T. Kostrzewski, *Existence and uniqueness of BC[a, b] solutions of nonlinear functional equation, Demonstratio Math.* 26, (1993), 61-74.

[3] T. Kostrzewski, *BC-solutions of nonlinear functional equation. A uniqueness case, Demonstratio Math.* 26, (1993), 275-285.

[4] M. Lupa, *On solutions of a functional equation in a special class of functions, Demonstratio Math.* 26, (1993), 137-147.

[5] Đinh Văn Ruy, Nguyễn Kim Khôi, Nguyễn Xuân Ngọc,*Về một hệ phương trình hàm* , *Báo cáo Hội nghị Khoa học và Công nghệ lần 6, Trường Đại học Bách Khoa TpHCM* 16-17/2/1995, tóm tắt , trang 98.

[6] Nguyễn Kim Khôi, Nguyễn Hội Nghĩa, Đinh Văn Ruy, *On a linear functional system, Báo cáo Hội nghị Toán học Toàn quốc lần 5, Hà Nội* 17-20/9/1997, tóm tắt, trang 52.

[7] Nguyen Thanh Long, Nguyen Hoi Nghia, Nguyen Kim Khoi, Dinh Van Ruy, *On a system of functional equations* , *Demonstratio Math.* 31, (1998), 313-324.

[8]Nguyen Thanh Long, Nguyen Hoi Nghia, On a system of functional equations in a multi-dimensional domain.J. *for Analysis and its Applications,* 19 (2000) (sắp đăng).