XÁC ĐỊNH CÂN BẰNG CỦA MÀNG CHỊU ỨNG SUẤT TRƯỚC BẰNG MÔ HÌNH HỆ THANH KHÔNG CHỊU NÉN

Trần Cảnh Dũng - Chu Quốc Thắng - Đặng Văn Nghìn
Trường Đại Học Kỹ Thuật
(Bài nhận ngày 16/01/1999)

TÓM TẮT : Việc định dạng ban đầu kết cấu màng chịu ứng suất trước là một trong số những vấn đề quan trọng trong việc mô hình và tính toán cơ học chúng. Trong bài này việc định dạng sẽ được thực hiện bằng cách xem kết cấu màng tương đương với một hệ thanh không chịu nén phù hợp với giả thiết kết cấu không bị xếp li cục bộ. Các phương trình cân bằng tại các nút cho việc tính hình học kết cấu được thiết lập bằng việc sử dụng khái niệm mật độ lực , nhờ đó mà việc tính toán là khá đơn giản và hiệu quả.

1. GIỚI THIỆU

Đối với kết cấu căng dạng màng, hiện trạng cân bằng không được thiết lập ban đầu như những kết cấu cứng truyền thống nhưng được tạo ra bởi ứng suất áp đặt trước

Việc xác định sự cân bằng này có thể được xem xét theo một số cách sau đây :

- Cân bằng hình học với một trường ứng suất đã cho.

Sức căng danh định sẽ được coi là dữ liệu cơ sở cho một sự cân bằng hình học của kết cấu.

- Phân tích phi tuyến sự chuyển vị [1]

Trường ứng suất áp đặt trước trong kết cấu được chọn phù hợp với loại vật liệu sử dụng và nhận được từ áp lực hay các chuyển vị tạo nên tại các biên. Tuy nhiên việc chọn dạng hình học và trường sức căng ban đầu ảnh hưởng lớn đến tốc độ tụ của bài toán, thậm chí đến sự khả dĩ hội tụ của nó.

- Trong phạm vi bài này sẽ dùng mô hình kết cấu màng bằng một hệ các thanh mà từ đó có thể thiết lập hệ phương trình tuyến tính để xác định sự cân bằng qua việc sử dụng phương pháp mật độ lực (MDL)

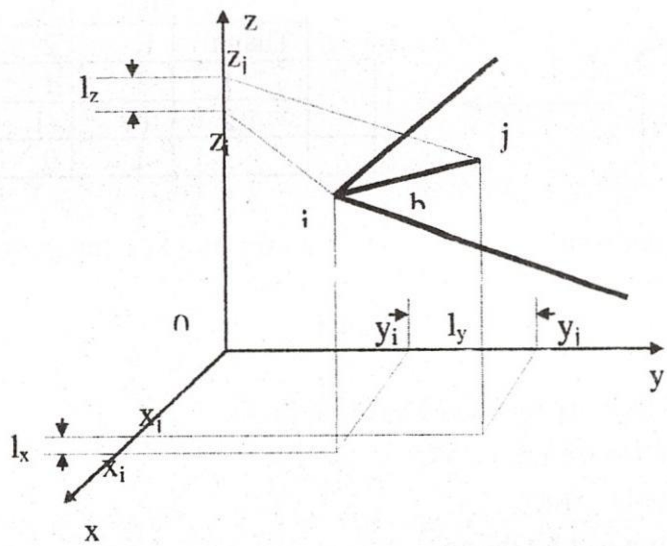
2. MÔ HÌNH VÀ CƠ SỞ LÝ THUYẾT

2.1 Giả thiết :

1. Vật liệu làm màng là đàn hồi có cùng bề dày .
2. Trạng thái ứng suất trước trên toàn kết cấu màng là hằng.
3 Màng chỉ chịu hiệu ứng kéo hay nén (đặc biệt coi như không có một vùng cục bộ nào chịu nén - bỏ qua hiện tượng xếp ly cục bộ).

2.2 Mô hình :

Xem màng tương đương với một hệ thanh (hay dây cáp) mà mỗi nút là khớp cầu.



Hình 3

Phương trình (4) trong hệ toạ độ (0xyz)

$$S_{abn} = S_{bn}.l_{ab} \quad ; \; a \in (x,y,z) \qquad (5)$$

Trong đó S_{abn} : hình chiếu của S_{bn} xuống Oa ∈ (Ox, Oy,Oz)

l_{ab} : hình chiếu của chiều dài cáp b xuống Oa (x_{bBd} - x_{bKt})

Khi đó (3) trở thành :

$$P_{ai} + \sum_b S_{abn} = 0 \quad ; \quad a \in (x,y,z) \qquad (6)$$

- Thiết lập ma trận liên kết :

Ma trận liên kết $[C]_{mxu}$ cho sự liên kết giữa các nút.

Gọi m : tổng số cáp hay thanh ; u : số nút

u_l : cột tướng ứng các nút tự do ; u_f : cột tương ứng các nút cố định

$$C_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{thanh i không chứa nút j} \\ -1 & \text{j nút thứ nhất của thanh i} \\ 1 & \text{j nút thứ hai của thanh i} \end{cases}$$

a∈(x,y,z) , gọi

$\{l_a\}$: vectơ chiều dài l_{ab} chiếu lên trục toạ độ $a \in (x,y,z)$

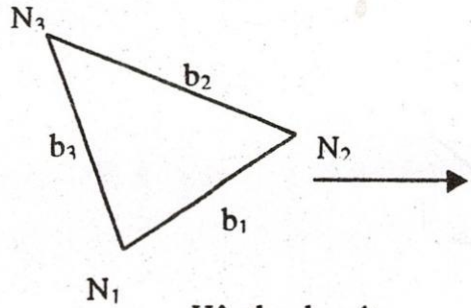
$[Q]$ mxm : Ma trận chéo mxm các giá trị mật độ p_b

$\{a\}$: Các vectơ toạ độ của u nút (u thành phần) . $a \in (x,y,z)$

$\{P_a\}$ vectơ các P_{an} của ngoại lực P_n trên hệ trục toạ độ $a \in (x,y,z)$. n : 1,2,..,u

Ta có :

$$\{l_a\} = [C].\{a\} \qquad a \in (x,y,z) \qquad (7)$$



	u_f	u	l
Thanh	1	2	3
1	-1	1	0
2	0	-1	1
3	-1	0	1

Hệ thanh nút **Ma trận liên kết tương ứng**

Hình 4

Hình 4 là ví dụ cho một hệ thanh với nút 1 cố định .

l_{xb} : hàng thứ b của ma trận [C] .{x}

$l_{xb} = (-1).\, x_{bBd} + (+1)\,.\, x_{bKt}$

Phương trình cân bằng của hệ thống :

$$\{P_a\} + \left\{\sum S_a\right\} = 0 \qquad a \in (x,y,z) \qquad (8)$$

Tổng lực áp đặt bởi các thanh lên nút n :

$$\sum S_a = -[C]^t[Q][C]\{a\} \qquad a \in (x,y,z) \qquad (9)$$

Từ đó , ta rút ra :

$$-[C]^t[Q][C]\{a\} + \{P_a\} = 0 \qquad (10)$$

$$\Rightarrow \{P_a\} = [C]^t[Q][C]\{a\} \qquad (11)$$

Ta chỉ có $3u_l$ nút tự do ($3u_l$ biến), với số u_f đã biết (các nút cố định). Để đơn giản có thể chia [C] , {a}, $\{P_a\}$ thành hai phần :

$$[C] = [C_l, C_f] \qquad (12)$$

$$\{a\} = \{a_l, a_f\}^t \qquad (13)$$

$$\{P_a\} = \{P_{al}, P_{af}\}^t \qquad (14)$$

$$[C]^t[Q][C]\{a\} = \begin{bmatrix} [C_l]^t[Q].c_l.a_l + [C_l]^t[Q].c_f.a_f \\ [C_f]^t[Q].c_l.a_l + [C_f]^t[Q].c_f.a_f \end{bmatrix} \qquad (15)$$

Đặt :

$$[D_l] = [C_l]^t[Q][C_l]; \quad [D_f] = [C_f]^t[Q][C_f] \qquad (16)$$

$$(3) \Rightarrow [D_l]\{a_l\} = \{P_{al}\} - [D_f]\{x_f\} \qquad (17)$$

Trên hệ trục tọa độ Oxyz :

$$[D_l]\{x_l\} = \{P_{xl}\} - [D_f]\{x_f\} \qquad [D_l]\{y_l\} = \{P_{yl}\} - [D_f]\{y_f\}$$

$$(18) \qquad [D_l]\{z_l\} = \{P_{zl}\} - [D_f]\{z_f\}$$

3 MÔ HÌNH TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT TRÊN PHÂN TỬ MÀNG TAM GIÁC VỚI HỆ THANH (DÂY)

3.1) Trường hợp vật liệu đẳng hướng.

Xét mối liên hệ giữa trạng thái ứng suất trên bề mặt màng với các ứng suất trên cạnh biên các phần tử tam giác màng của kết cấu. Theo định lý công ảo, công của ứng suất trong bề mặt phần tử màng tam giác bằng công tạo ra do lực dọc theo cạnh biên của phần tử màng tam giác.

Do trạng thái ứng suất hằng, trường chuyển vị được viết :

$$u = \frac{\partial u}{\partial x}.x + \frac{\partial u}{\partial y}.y + u_1 = \varepsilon_x.x + \frac{\partial v}{\partial y}.y + u_1 \qquad (19)$$

$$v = \frac{\partial v}{\partial x}.x + \frac{\partial v}{\partial y}.y + v_1 = \frac{\partial v}{\partial x}.x + \varepsilon_y.y + v_1 \qquad (20)$$

Giả thiết : $u_1 = v_1 = 0$

Công ảo do lực trên cách cạnh của phần tử màng IJK [5]

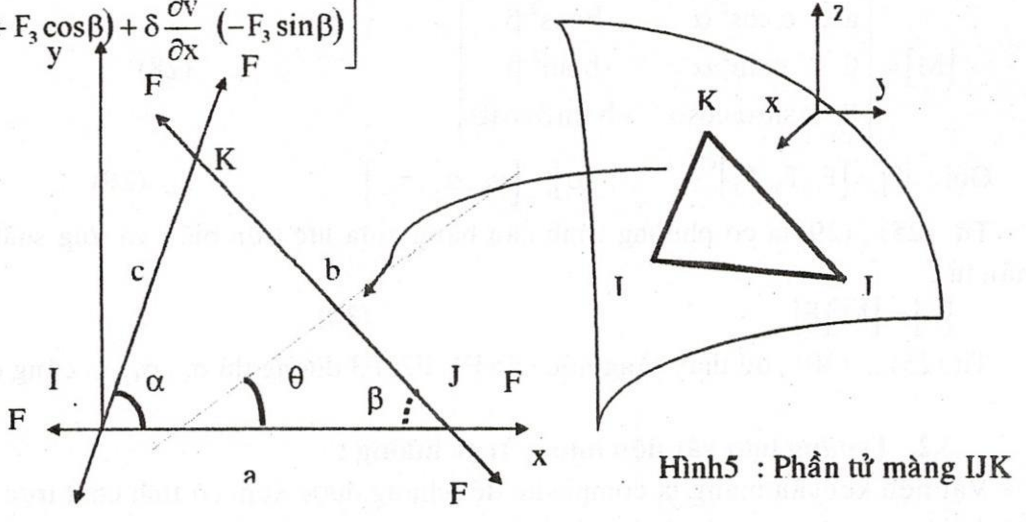
$$\delta w = \delta w_i + \delta w_j + \delta w_k \qquad (21)$$

Gọi : $\delta u_t, \delta v_t,\ \ t \in (i,j,k)$: các chuyển vị ở nút i,j,k

Tại nút I : $\delta w_i = 0 \quad (u_1 = v_1 = 0)$

Tại nút J : $\delta w_j = \delta u_j(F_1 + F_3\cos\beta) + \delta v_j(-F_3\sin\beta) =$

$$a\left[\delta\varepsilon_x(F_1 + F_3\cos\beta) + \delta\frac{\partial v}{\partial x}(-F_3\sin\beta)\right]$$



Hình5 : Phần tử màng IJK

Tại nút K :

$$\delta w_k = \delta u_k(F_2\cos\alpha - F_3\cos\beta) + \delta v_k(F_3\sin\beta + F_2\sin\alpha)$$

$$= \delta\varepsilon_x.\left(F_2.c.\cos^2\alpha - F_3.c.\cos\alpha.\cos\beta\right) + \delta\varepsilon_y\left(F_2\sin^2\alpha + F_3.c.\sin\alpha.\sin\beta\right) +$$

$$\delta\frac{\partial u}{\partial y}\left(F_2.c.\cos\alpha - F_3.c.\sin\alpha.\cos\beta\right) + \delta\frac{\partial v}{\partial x}\left(F_2.c.\cos\alpha.\sin\alpha + F_3.c.\sin\beta.\cos\alpha\right)$$

(22)

Công toàn phần (đối với ba nút) :

$$\begin{aligned}\delta w_{I+J+k} = {} & \delta\varepsilon_x.\left(a.F_1 + c.\cos^2\alpha.F_2 + b.\cos^2\beta - F_3.c.\cos\alpha.\cos\beta\right)\\ & + \delta\varepsilon_y\left(F_2.c.\sin^2\alpha + F_3.c.\sin\alpha.\sin\beta\right) \qquad (23)\\ & + \delta\frac{\partial v}{\partial x}\left(F_2.c.\cos\alpha.\sin\alpha + F_3.a.\sin\beta + F_3.c.\sin\beta.\cos\alpha\right)\end{aligned}$$

Công ảo do trường ứng suất hằng trên mặt phần tử tam giác này :

$$\delta w = \int_V \delta\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}dv = V\left(\delta\varepsilon_x\sigma_x + \delta\varepsilon_y\sigma_y + \delta\left(2.\varepsilon_{xy}\right).2\tau_{xy}\right) \qquad (24)$$

V là thể tích của phần tử có diện tích bề mặt S ,bề dày màng e . Từ (23) (24) :

$$\sigma_x = \frac{1}{V}\left(a.F_1 + c.\cos^2\alpha.F_2 + b.\cos\beta.F_3\right) \qquad (25)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{V}\left(c.\sin^2\alpha.F_2 + b.\sin^2\beta.F_3\right) \qquad (26)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{V}\left(c.\cos\alpha.\sin\alpha.F_2 + b.\sin\beta.\cos\beta.F_3\right) \qquad (27)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} a & c.\cos^2\alpha. & b\cos^2\beta \\ 0 & c\sin^2\alpha & b\sin^2\beta \\ 0 & c\sin\alpha\cos\alpha & -b\sin\beta\cos\beta \end{bmatrix} \qquad (28)$$

Goi : $|F| = [F_1, F_2, F_3]^t$; $[\sigma] = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^t$ (29)

Từ (25) ..(29, ta có phương trình cân bằng giữa lực trên biên và ứng suất trên mặt phần tử :

$$[\sigma] = [M][F] \qquad (30)$$

Từ (25) ... (30) , dể thấy rằng nếu các F1, F2, F3 dương thì σ_c , σ_t , τ_{ct} cũng dương

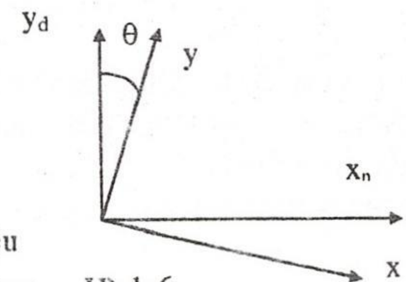
3.2. Trường hợp vật liệu màng trực hướng :

Vật liệu kết cấu màng là composite dệt chúng được xem có tính chất trực hướng [6] (với hai hướng chịu lực chính theo hai phương sợi của lớp cốt vải). Từ mô hình cân bằng trên có thể tính được ứng suất theo hai phương này.

Do $\alpha, \beta \neq 0$, Det M $\neq 0$, nghĩa là $\exists\ [M]^{-1}$

$$[F] = [M]^{-1}[\sigma] \qquad (31)$$

Gọi θ là góc giữa hệ trục Oxy và hệ toạ độ Ox_ny_d mà các trục là các hướng chính của vật liệu . Gọi [P] là ma trận chuyển từ hệ toạ độ Oxy sang hệ toạ độ Ox_ny_d (H.6) .



$$[P] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad (32)$$

σ_C : ứng suất theo hướng chính Ox_n của vật liệu

σ_t : ứng suất theo hướng chính Oy_d của vật liệu ;

Hình 6

Do đó, ứng suất trong hệ toạ Ox_ny_d : [5]

$$\begin{bmatrix} \sigma_c & \tau_{ct} \\ \tau_{ct} & \sigma_t \end{bmatrix} = [P]\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}[P]^t \qquad (33)$$

Khi đó :

$$[\sigma] = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_c \\ \sigma_t \\ \tau_{ct} \end{Bmatrix} \qquad (34)$$

$$\text{Đặt}: [L] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \qquad (35)$$

Từ (31), (35) :

$$[F] = [M]^{-1}[L][\sigma]_{th} \qquad (36)$$

$$[F] = [M]^{-1}\begin{bmatrix} \cos^2\theta.\sigma_c + \sin^2\theta.\sigma_t - 2\sin\theta\cos\theta.\tau_{ct} \\ \sin^2\theta.\sigma_c + \cos^2\theta.\sigma_t + 2\sin\theta\cos\theta.\tau_{ct} \\ \sin\theta\cos\theta.\sigma_c - \sin\theta\cos\theta.\sigma_t + (\cos^2\theta - \sin^2\theta).\tau_{ct} \end{bmatrix} \qquad (37)$$

Rỏ ràng phương trình cân bằng phụ thuộc vào $\theta, \sigma_C, \sigma_t, \tau_{ct}$.

$$\sigma_c = a.F_1\cos^2\theta + c.F_2.(\cos\theta.\cos\alpha + \sin\theta.\sin\alpha)^2 + b.F_3.(\cos\theta.\cos\beta + \sin\theta\sin\beta)^2$$

(38)

$$\sigma_t = a.F\sin^2\theta + c.F_2(\sin\theta.\cos\alpha + \cos\theta.\sin\alpha)^2 + bF_3(\sin\theta.\cos\beta + \cos\theta.\sin\beta)^2$$

(39)

* σ_C σ_t luôn dương bất chấp θ.

$$\tau_{ct} = \frac{1}{2}\left[\sin 2\theta(a.F_1 + c.\cos 2\alpha.F_2 + b.\cos 2\beta.F_3) + \cos 2\theta(c\sin 2\alpha.F_2 - b.\sin 2\beta.F_3)\right]$$

(4

0)

Có thể tìm hướng lý tưởng ở đó các trục thuộc hệ Ox_ny_d có cùng ứng suất pháp trên hai hướng ($\sigma_C = \sigma_t = \sigma_0$) và ứng suất cắt $\tau_{ct} = 0$, khi đó : $[F] = [M]^{-1}[\sigma_0 \quad \sigma_0 \quad 0]^T$

(41)

Các lực trên biên phần tử được tính với giả thiết ứng suất hằng trên bề mặt phần tử và với [F] có thể xác định dạng cân bằng khi biết trạng thái ứng suất trong toàn bộ kết cấu.

Với các mật độ lực áp đặt lên hệ khác nhau sẽ có một dạng hình học xác định. Dùng phép lặp với các mật độ lực khác nhau ta sẽ có dạng cân bằng mong muốn của kết cấu, giải thuật cho ở (H.7).

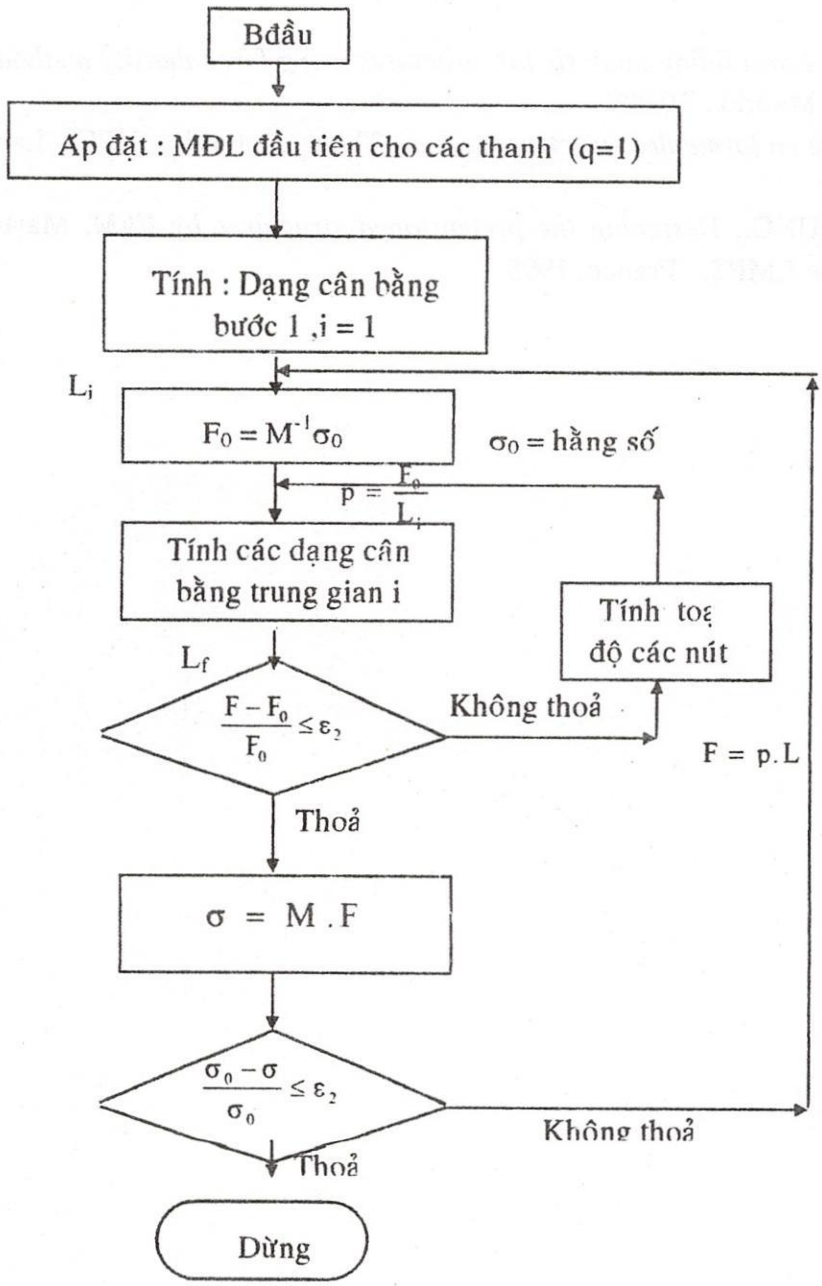
4. NHẬN XÉT VÀ KẾT LUẬN

- Vì [D] là ma trận chéo, [C] không suy biến do đó lời giải (18) là duy nhất.
- Việc tính cân bằng kết cấu khá đơn giản (giải một hệ phương trình tuyến tính với u_i biến)
- Các mật độ lực dương bảo đảm trạng thái kéo của các thanh nên việc định dạng kết cấu màng bằng hệ thanh chịu kéo bảo đảm màng không chịu hiện tượng nén cục bộ

FORM FINDING PRETENSION MEMBRANE STRUCTURES BY UNCOMPRESSED TRUSS SYSTEM

Tran Canh Dung - Chu Quoc Thang - Đang Van Nghin

ABTRACT : The Initial form finding is one of the most important things in modeling and computing the pretension membrane structures. In this paper , the form finding will be performed based on a model in which the membrane is considered as an uncompressed truss system. The equilibrium equations at nodes will be etablished by using the force density method. Owning to that, the form finding is easier and more efficient.



Hình 7 : Lưu đồ xác định dạng cân bằng của kết cấu

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] JIRO K., *An interactive shape fiding analysis for cable and membrane structures*, Proceeding IASS symposium 1 , Osaka,1986.

[2] SHEK H.J, *The force density method for finding and computation of general networks*, Computer methods in applied mechanics and engineering 3/1974.

[3] TSUBOTA H.,*Theorical analysis of actual initial equilibrium state for membrane structures based on cutting patterns* , International symposium on Innovative applications of Sells and Spatial forms, India 1988

[4] YOSHIDA A., *A Form fiding analysis for structures using force density method* , IASS SYMPOSIUM, Madrid , 7/1989

[5] ALLERA R., *Mise en forme des structure tendues*, Thèse doctorale, INPG - Labo 3S, France 1992.

[6] TRAN CANH DUNG., *Designing the pretensioned structures by FEM*, Master thesis, ENSITM - labo LMPT, France, 1995.