Vi phân ngẫu nhiên đối với lớp quá trình Itô – Levy

- **Dương Tôn Đảm**
  Trường Đại học Công nghệ Thông tin, ĐHQG-HCM
- **Nguyễn Ngọc Phụng**
  Trường Đại học Ngân hàng TP. Hồ Chí Minh

(Bài nhận ngày 09 tháng 11 năm 2015, nhận đăng ngày 06 tháng 05 năm 2016)

TÓM TẮT

Khi mở rộng khái niệm về quá trình ngẫu nhiên liên tục, người ta thường xét đến lớp quá trình ngẫu nhiên có nhảy và sử dụng công cụ về vi – tích phân Itô – Levy, từ đó có thể thu được nhiều kết quả quan trọng về mặt lý thuyết và thực hành. Trong bài báo này chúng tôi tiếp tục phát triển theo các kết quả đã được công bố trước đây để thu được công thức về vi phân tích của quá trình ngẫu nhiên có nhảy và áp dụng cho một số dạng quá trình đặc biệt như quá trình thuần nhảy, quá trình Levy – Ornstein – Uhlenbeck, quá trình Levy hình học.

Từ khóa: *quá trình Itô – Levy, vi phân ngẫu nhiên, quá trình ngẫu nhiên có nhảy*

MỞ ĐẦU

Khái niệm về quá trình ngẫu nhiên Itô – Levy

Cho $\xi(t)$ là một quá trình Levy, và bước nhảy của $\xi(t)$ tại thời điểm t là đại lượng xác định bởi:

$$\Delta\xi(t) := \xi(t) - \xi(t^-)$$

Với $\mathcal{B}(R_0)$ là σ –đại số sinh bởi các tập con Borel U thuộc R, sao cho $\bar{U} \in \mathcal{B}(R_0)$;

$R_0 := R\backslash\{0\}$, xác định độ đo nhảy Poisson:

$$N(t, U) := \sum_{0<s<t} \chi_U(\Delta\xi(t))$$

trong đó $\chi_U(.)$ là hàm chỉ tiêu của U (indicator function). Khi đó $N(t, U)$ chính là số các bước nhảy có độ lớn $\Delta\xi(t) \in U$; $\forall s: 0 < s < t$. Từ đó xác định dạng vi phân của độ đo nhảy Poisson là: $N(dt, dx)$; $t > 0, x \in R_0$.

Định nghĩa. Quá trình ngẫu nhiên Itô – Levy $X(t, \omega) = X(t)$, là quá trình:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \alpha(s, \omega)ds + \int_0^t \beta(s, \omega)dB(s) + \int_0^t \int_{R_0} \gamma(s, x)\bar{N}(ds, dx). \quad (1)$$

trong đó $B(s)$ là quá trình Wiener tiêu chuẩn, và độ đo Poisson bù $\bar{N}(ds, dx)$ (compensated Poisson random measure), xác định bởi:

$$\bar{N}(ds, dx) := N(dt, dx) - \nu(dx)dt\,;$$

$\nu(dx) := E[N(1, dx)]$; $dx \in \mathcal{B}(R_0)$; ($\nu(dx)$ thường được gọi là độ đo Levy),

và thỏa điều kiện : $\int_0^t [|\alpha(x)| + \beta^2(x) + \int_{R_0} \gamma^2(s, x)\nu(dx)] < \infty$; $h.c.c$

Dạng biểu diễn (1) sẽ tương đương với dạng biểu diễn vi phân sau:

$$dX(t) = \alpha(t)dt + \beta(t)dB(t) + \int_{R_0} \gamma(t, x)\bar{N}(dt, dx).$$

Nếu $\beta(x) \equiv 0$, gọi $X(t)$ là quá trình Itô – Levy dạng thuần nhảy.

Quá trình ngẫu nhiên Itô – Levy nhiều chiều được định nghĩa mở rộng như sau:

Cho quá trình Wiener n_1-chiều $B(t) = \left(B_1(t), \dots, B_{n_1}(t)\right)^T$; $T \geq 0$, và độ đo Poisson bù n_2-chiều ; $t \geq 0; x = \left(x_1, \dots, x_{n_2}\right)^T$, $\bar{N}(dt, dx) = \left(\bar{N}_1(dt, dx_1), \dots, \bar{N}_{n_2}(dt, dx_{n_2})\right)^T$, Quá trình ngẫu nhiên Itô – Levy n-chiều là quá trình xác định bởi

$dX(t) = \alpha(t)dt + \beta(t)dB(t) + \int_{(R_0)^{n_2}} \gamma(t,x)\,\bar{N}(dt,dx)$ (2)

sao cho

$dX_i(t) = \alpha_i(t)dt + \sum_{j=1}^{n_1} \beta_{ij}(t)dB_j(t) + \sum_{k=1}^{n_2} \int_{R_0} \gamma_{ik}\,\bar{N}_k(dt,dx_k)$; $i=\overline{1,n}$.

Trong đó,

$\alpha(t) = (\alpha_i(t))_{1\times n}; \beta(t) = (\beta_{ij}(t))_{n\times n_1}; \gamma(t,x) = (\gamma_{ik}(t,x))_{n\times n_2}; j = \overline{1,n_1}; k = \overline{1,n_2}$

thỏa điều kiện

$\sum_{i=1}^{n} \int_0^t (|\alpha_i(s)| + \sum_{j=1}^{n_1} \beta_{ij}^2(s) + \sum_{k=1}^{n_2} \gamma_{ik}^2(s,x_k)\nu_k(dx_k))ds < \infty.$

Công thức Itô cho quá trình ngẫu nhiên Itô – Levy nhiều chiều

Cho $X(t)\,; t \geq 0$, là quá trình ngẫu nhiên Itô – Levy n-chiều xác định bởi (2) và

$f: (0,\infty) \times R^n \to R$, là hàm thuộc $C^{1,2}((0,\infty) \times R^n)$. Xác định: $Y(t) := f(t,X(t))\,; t \geq 0$, khi đó sẽ có công thức Itô (xem [1], 164 – 165):

$$\begin{aligned} dY(t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t,X(t))dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,X(t))\alpha_i(t)dt \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,X(t))\beta_{ij}(t)\,dB_j(t) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t,X(t))(\beta\beta^T)_{ij}(t)\,dt \\ &+ \sum_{k=1}^{n_2} \int_{R_0} \Big[f\big(t,X(t)+\gamma^k(t,x)\big) - f(t,X(t)) \\ &- \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,X(t))\gamma_{ik}(t,x)\Big]\nu_k(dx_k)\,dt \\ &+ \sum_{k=1}^{n_2} \int_{R_0} \Big[f\big(t,X(t^-)+\gamma^k(t,x)\big) \\ &- f(t,X(t^-))\Big]\bar{N}_k(dt,dx_k)\ ; \end{aligned} \tag{3}$$

trong đó $\gamma^k(t,x)$ là cột thứ k của ma trận $\gamma(t,x) = (\gamma_{ik}(t,x))_{n\times n_2}$;

KẾT QUẢ

Công thức vi phân tích đối với quá trình có nhảy

Sử dụng công thức Itô thu được công thức vi phân tích cho quá trình ngẫu nhiên có nhảy

Định lý 1: Cho hai quá trình ngẫu nhiên Itô – Levy một chiều xác định bởi

$dH_l(t) = \alpha_l(t)dt + \beta_l(t)dB(t) + \int_{R_0} \gamma_l(t,x)\bar{N}(dt,dx)\ ; l = 1,2$

khi đó sẽ có : $d(H_1(t)H_2(t)) =$

$= H_1(t^-)dH_2(t) + H_2(t^-)dH_1(t) + \beta_1(t)\beta_2(t)dt + \int_{R_0} \gamma_1(t,x)\gamma_2(t,x)N(dt,dx)$ (4)

Định lý 2: Cho các quá trình ngẫu nhiên Itô – Levy một chiều xác định bởi (3), và các số $n_l \in N\backslash\{0\}; l = 1,2$, có công thức vi phân tích

$$\begin{aligned} d\left(X_1^{n_1}(t)X_2^{n_2}(t)\right) &= X_1^{n_1}(t^-)dX_2^{n_2}(t) \\ &+ X_2^{n_2}(t^-)dX_1^{n_1}(t) \\ &+ \mathfrak{B}_1(t)\mathfrak{B}_2(t)dt \\ &+ \int_{R_0} \mathfrak{D}_1(t,x)\mathfrak{D}_2(t,x)N(dt,dx) \end{aligned} \tag{5}$$

trong đó :

$\mathfrak{B}_l(t) = n_l\beta_l(t)X_l^{n_l-1}(t^-)\ ; \mathfrak{D}_l(t,x) = \sum_{k=1}^{n_l} C_{n_l}^k X_l^{n_l-k}(t)\gamma_l(t,x)\ ;\ C_{n_l}^k = \frac{n_l!}{k!(n_l-k)!}\ ; l = 1,2.$

Chứng minh

Trước hết dựa vào công thức Itô (3), áp dụng cho hàm $f(t,X_l(t)) = (X_l(t))^{n_l}, l = 1,2;$ sẽ tính được vi phân ngẫu nhiên của hàm $f(t,X_l(t))$ dưới dạng:

$$\begin{aligned} d(X_l(t))^{n_l} &= \Big[n_l\alpha_l(t)X_l^{n_l-1}(t^-) + \frac{1}{2}n_l(n_l-1)\beta_l^2(t)X_l^{n_l-2}(t^-) \\ &+ \int_{R_0}\sum_{k=2}^{n_l} C_{n_l}^k\gamma_l^k(t,x)X_l^{n_l-k}(t)\nu(dx)\Big]dt \\ &+ n_l\beta_l(t)X_l^{n_l-1}(t^-)dW(t) \\ &+ \int_{R_0}\sum_{k=1}^{n_l} C_{n_l}^k\gamma_l(t,x)X_l^{n_l-k}(t)\,\bar{N}(dt,dx). \end{aligned} \tag{6}$$

Sau đó sử dụng hệ thức (6) và công thức (4) trong Định lý 1, sẽ thu được (5).

Áp dụng kết quả thu được cho một số quá trình ngẫu nhiên đặc biệt

Quá trình ngẫu nhiên thuần nhảy (pure jump)

Quá trình ngẫu nhiên thuần nhảy là một quá trình thuộc lớp Itô – Levy có dạng vi phân như sau:

$$dQ(t) = \int_{R_0} \gamma(t,x)\,\bar{N}(dt,dx)\ ;\ t \in [0,t]$$

trong đó , γ là quá trình ngẫu nhiên thỏa điều kiện

$$\int_0^T \int_{R_0} \gamma^2(t,x)\nu(dx)\,dt < \infty$$

Áp dụng hệ thức (6) với $m \in N\backslash\{0\}$; $\alpha(t) \equiv 0$; $\beta(t) \equiv 0$ sẽ thu được:

$$d\big(Q(t)\big)^m = \left[\int_{R_0} \sum_{k=2}^{m} C_m^k \gamma(t,x) Q^{m-k}(t)\nu(dx)\right] dt + \int_{R_0} \sum_{k=1}^{m} C_m^k \gamma(t,x) Q^{m-k}(t)\,\bar{N}(dt,dx). \quad (7)$$

Quá trình ngẫu nhiên Levy – Ornstein – Uhlenbeck

Quá trình ngẫu nhiên Levy – Ornstein – Uhlenbeck U(t) là một quá trình ngẫu nhiên thuộc lớp Itô – Levy , nó có vi phân ngẫu nhiên xác định bởi:

$$dU(t) = \lambda(t)U(t)dt + \int_{R_0} \gamma_1(t,x)\,\bar{N}(dt,dx)\ ;\ t \in [0,T]\ ,$$

trong đó:

$\lambda(t) \in L^1([0,T])$ và γ_1 là quá trình ngẫu nhiên thỏa điều kiện : $\int_0^T \int_{R_0} \gamma_1^2(t,x)\nu(dx)\,dt < \infty$.

Khi xét vi phân tích của quá trình Levy – Ornstein –Uhlenbeck U(t) này với quá trình hình học Levy $K(t)$, tức quá trình có vi phân ngẫu nhiên dạng:

$$dK(t) = K(t^-)[\alpha(t)dt + \beta(t)dB(t) + \int_{R_0} \gamma_2(t,x)\bar{N}(dt,dx)]\ ;\quad t \geq 0.$$

Áp dụng công thức (4) sẽ có :

$$d\big(U(t)K(t)\big) = U(t^-)dK(t) + K(t^-)dU(t) + \int_{R_0} K(t^-)\gamma_1(t,x)\,\gamma_2(t,x)N(dt,dx).$$

Những phương trình đặc biệt nêu trên có rất nhiều ứng dụng trong các mô hình toán về tài chính , kinh tế và công nghệ thông tin.

Lời cảm ơn: *Nghiên cứu này được tài trợ bởi Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh trong khuôn khổ Đề tài mã số C2015-26-05.*

Stochastic differential of Ito – Levy processes

- **Duong Ton Dam**
  University of Information Technology, VNU-HCM
- **Nguyễn Ngọc Phụng**
  Banking University of Ho Chi Minh City

ABSTRACT

In this paper, we continue to expand some results to get the product rule for differential of stochastic processes with jump, and apply for some special processes like pure jump process, Levy-Ornstein-Uhlenbeck process, geometric Levy process, in models of finance, ecomomics, and information technology.

Keywords: *Ito – Levy process, stochastic differential, stochastic process with jump*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. G.D. Nunno, B. Øksendal, F. Proske, Malliavin calculus for Levy processes with applications to finance, 159-171, *Springer* (2009).

[2]. B. Øksendal, A. Sulem, Applied stochastic control of jump diffusions, 5-11, *Springer* (2005).

[3]. D. Applebaum, Levy Processes and stochastic calculus, *Cambridge University Press*, 363-389 (2009).

[4]. F.B. Hanson, Applied stochastic processes and control for Jump Diffusions, *SIAM*, 158-165 (2007).

[5]. D.T. Đảm, Quá trình ngẫu nhiên – Phần II Các phép toán Malliavin, NXB ĐHQG TP.HCM, 53-59 (2010).

[6]. D.T. Đảm, Một số công thức vi phân hàm ngẫu nhiên, *Tạp chí Phát triển Khoa học & Công nghệ*, 12, 7, 29 – 34 (2009).

[7]. D.T. Đảm, Tính toán ngẫu nhiên với quá trình dạng Hermite, *Tạp chí Phát triển Khoa học & Công nghệ*, 11, 6, 49 – 54 (2008).